Régularité des solutions de problèmes elliptiques ou paraboliques avec des données sous forme de mesure

Sadjiya Ariche

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de

VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par ARICHE Sadjiya

Le 25/06/2015, à Valenciennes, France

Ecole doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :

Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV)

Régularité des solutions de problèmes elliptiques ou paraboliques avec des données sous forme de mesure

JURY

Président de jury
– Ali Mehmeti, Félix. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Rapporteurs
– Amrouche, Chérif. Professeur. Université de Pau et des Pays de l'Adour.
– Vial, Grégory. Professeur. École Centrale de Lyon.

Examinateurs
– Ponce, Augusto C. Professeur. Université catholique de Louvain, Belgique.

Directeurs de thèse
– De Coster, Colette. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.
– Nicaise, Serge. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de

VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par ARICHE Sadjiya

Le 25/06/2015, à Valenciennes, France

Ecole doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :

Laboratoire de Mathématiques et ses Applications de Valenciennes (LAMAV)

Régularité des solutions de problèmes elliptiques ou paraboliques avec des données sous forme de mesure

JURY

Président de jury
- Ali Mehmeti, Félix. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Rapporteurs
- Amrouche, Chérif. Professeur. Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Vial, Grégory. Professeur. École Centrale de Lyon.

Examinateurs
- Ponce, Augusto C. Professeur. Université catholique de Louvain, Belgique.

Directeurs de thèse
- De Coster, Colette. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.
- Nicaise, Serge. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Parseval
mathématique
points
Helmholtz
Laplacien
problème
elliptique
unicité
Lax-Milgram
norme
parabolique
Transformée
Hardy
Green
Mellin
singulier
Hilbert
fracture
distance
borné
sphères
existence
domaine
temps
équation
espace
isomorphismes
solution
poids
Régularité
infini
chaleur
Laplace
Sobolev
EDP
Hankel
droite
Fourier
Dirac
courbes

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions principalement l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta v = q\ \delta_\sigma, & \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ v = 0, & \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{O}$ est un domaine tridimensionnel qui contient une fracture unidimensionnelle σ et $q \in L^2(\sigma)$, ainsi que le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = q(t)\ \delta_\sigma, & \text{dans} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ contenant 0, $\sigma = \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ et $q \in L^2(\sigma)$. Les solutions de ces problèmes étant singulières sur σ, nous étudions leur régularité dans des espaces de Sobolev avec poids, le poids étant la distance à la fracture σ.

Dans un premier temps, nous étudions le problème (1) dans le cas où la fracture σ est droite. Plus précisément nous étudions trois situations correspondant aux cas où la fracture est soit une droite, soit une demi-droite, soit un segment borné. Dans ces situations modèles, nous utilisons une technique classique qui consiste à appliquer une transformée de Fourier ou une transformée de Mellin sur le problème (1). Ceci nous amène à étudier l'équation de Helmholtz en 2D. De même, la transformée de Laplace transforme l'équation de la chaleur (2) dans la même équation de Helmholtz en 2D.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au problème (1) dans le cas où la fracture est une courbe régulière strictement incluse dans $\mathcal{O}$. Grâce aux résultats de [15], en utilisant un argument de localisation et un recouvrement dyadique, nous obtenons une régularité améliorée de la solution toujours dans des espaces de Sobolev avec poids.

Mots clés

Régularité, espace de Sobolev à poids, problèmes elliptiques, équation de la chaleur, mesure de Dirac, fracture courbe, équation de Helmholtz, transformée de Fourier, transformée de Mellin.

Abstract

In this thesis, we mainly study the Laplace equation

$$\begin{cases} -\Delta v = q\,\delta_\sigma, & \text{in} \quad \mathcal{O}, \\ v = 0, & \text{on} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathcal{O}$ is a three-dimensional domain that contains a one-dimensional fracture σ and $q \in L^2(\sigma)$ as well as the problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = q(t)\,\delta_\sigma, & \text{in} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega, \\ u = 0, & \text{on} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = 0, & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^2$ containing 0, $\sigma = \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ and $q \in L^2(\sigma)$. As the solutions of these problems are singular on σ, we study their regularity in weighted Sobolev spaces, the weight being the distance to the fracture σ.

As a first step, we study the problem (1) in the case where the fracture σ is straight. More precisely we study three situations corresponding to the cases where the fracture is either a line or a half-line, or a bounded segment. These models situations in dimension three are treated by using Fourier or Mellin technique that reduces the problem (1) to a Helmholtz problem in two dimension. Similarly, the Laplace transformation transforms the heat equation (2) in the same Helmholtz equation in 2D.

In a second step, we consider the problem (1) in the case where the fracture is a smooth curve strictly included in $\mathcal{O}$. Thanks to the results of [15], using a localization argument and a dyadic recovery, we get an improved smoothness of the solution always in weighted Sobolev spaces.

Key words

Regularity, weighted Sobolev spaces, elliptic problems, heat equation, Dirac measure, fracture curve, Helmholtz equation, Fourier transformation, Mellin transformation.

Remerciements

JE tiens tout d'abord à remercier le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique d'Algérie pour son support financier tout au long de ma thèse.

Ensuite, mes remerciements vont à mes directeurs de thèse, Colette De Coster et Serge Nicaise, Professeurs à l'Université de Valenciennes, de m'avoir fait bénéficier de leur expertise, pour leur soutien sans faille, leur aide précieuse, leur bonne humeur, leur disponibilité et également pour leurs nobles qualités humaines. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je leurs adresse ma gratitude pour tout cela. Ma thèse n'aurait jamais vu le jour sans eux.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi aux rapporteurs Monsieur le Professeur Chérif Amrouche et Monsieur le Professeur Grégory Vial, ainsi qu'aux examinateurs le Professeur Félix Ali Mehmeti, et Monsieur le Professeur Augusto C. Ponce qui m'ont fait le grand honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier Madame Wided Chikouche, Maître de Conférence à l'université de Jijel-Algérie, pour ses discussions enrichissantes, ses conseils précieux et son approche amicale.

Je remercie tous les membres, les enseignants-chercheurs et notre adorable secrétaire Nabila Daifi et tous mes collègues (docteurs et futurs docteurs) du Laboratoire de Mathématiques appliquées (LAMAV) qui, par leurs encouragements ont participé de loin ou de près à cette thèse. En particulier, je remercie Fatiha, Zainab, Cindy, Florent, Thibault, Abdelouahab, Marilena, Sara, Lynda et Amira, pour les très fructueuses discussions que nous avons pu avoir ensemble, ainsi que pour leur contribution à une ambiance de travail aussi profitable qu'agréable.

Évidemment, ces remerciements ne seraient pas complets sans la mention de ma famille. Un grand merci à mes parents pour m'avoir donné le goût des études, pour leur amour inestimable, leur confiance, leurs sacrifices et pour leur appui sans faille. Sans oublier mes chères sœurs et frère, mes loulous Adam, Bochra et Cirine qui rendent ma vie toujours aussi belle.

Merci

Table des matières

Table des figures

Chapitre 0

Introduction Générale

SOIT $\mathcal{O}$ un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^3$ contenant une fracture unidimensionnelle σ. Motivé par des problèmes en ingénierie, on s'intéresse principalement à l'étude de la régularité de la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= q\delta_\sigma, \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \quad u &= 0, \quad\quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{1}$$

avec q dans $L^2(\sigma)$.
Le problème (1) est non standard car sa solution ne peut pas être dans $\mathring{H}^1(\mathcal{O})$ (i.e. le sous-espace des fonctions dans $H^1(\mathcal{O})$ qui s'annulent sur la frontière de $\mathcal{O}$) puisque le second membre de ce problème n'est pas dans son dual. La motivation principale de cette étude est de fournir un outil méthodologique pour traiter les problèmes elliptiques dans des domaines fracturés, représentés par un second membre sous forme de mesure, qui est la mesure de Dirac aux points fracturés.

Des problèmes similaires à (1) ont déjà été étudiés dans les espaces de distributions $H^{-s}(\mathcal{O})$ avec $s \geq 0$ (espace de Sobolev d'ordre négatif), notamment par Schechter [40], Lions et Magenes [30], Roitberg [39] et Babuška et Nistor [7, 8].
Dans [38], Ponce considère le problème de Dirichlet linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu, \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \quad u &= 0, \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{2}$$

avec $\mathcal{O}$ un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^N$, dans le cas où μ est une fonction de $L^1(\mathcal{O})$ ou, plus généralement une mesure de Borel finie dans $\mathcal{O}$. Une solution de ce problème (2) est une fonction L^1 satisfaisant pour tout $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\mathcal{O}})$,

$$-\int_{\mathcal{O}} u\Delta\zeta = \int_{\mathcal{O}} \zeta d\mu.$$

Cette solution existe et l'estimation satisfaite par cette dernière est toujours la même, c-à-d. il n'y a pas de gain de régularité si nous savons que μ est une fonction L^1 plutôt qu'une mesure finie. Grâce à la théorie de régularité de Stampacchia [42], cette solution u appartient à $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ pour tout $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$.

De tels résultats ne fournissent pas assez d'informations près de la fracture σ de notre problème (1), où la solution est singulière. Pour préciser ce comportement singulier, des espaces de Sobolev avec poids ont été introduits (le poids étant la distance à la fracture σ, voir Section 1.1) et nous avons montré qu'une solution existe dans ces espaces.

Pour résoudre des problèmes aux limites sur des domaines non réguliers, on s'intéresse depuis longtemps au comportement de la solution au voisinage des singularités géométriques (coins, arêtes,...,etc). Dans des domaines avec coins, des résultats de régularités ont été donnés par Kondrat'ev [26] dans les espaces de Sobolev avec poids, où il décompose la solution en une partie régulière et une autre singulière.
Une étude très détaillée de la théorie des singularités des problèmes elliptiques du second ordre a été menée par Grisvard [23, 24]. À la suite des travaux de Grisvard, Nicaise a commencé l'étude des problèmes aux limites sur des polygones [35]. Le sujet a été abordé dans toute sa généralité par Dauge [17]. Dans [33, 32, 11], les auteurs traitent des problèmes aux limites elliptiques sur des cônes, des domaines à coins, des domaines avec arêtes et des polyèdres de façon plus générale.

Des problèmes similaires à (1) se rencontrent dans des modèles réduits de fluides afin d'économiser les ressources de calcul (voir [16, 15]) ou correspondent à des problèmes physiques idéalisant une charge supportée par σ. Un exemple du premier cas est obtenu par la loi de Darcy dans les domaines fracturés :

$$\nabla(-k\nabla u) = q\delta_\sigma, \quad \text{dans } \mathcal{O},$$

où k est la perméabilité hydraulique positive du milieu, c'est-à-dire la capacité du milieu poreux $\mathcal{O}$ à laisser passer les fluides à l'intérieur des pores, q est la densité linéaire du flux de σ dans $\mathcal{O}$ et u est la pression du flux dans le milieu poreux $\mathcal{O}$. Si la densité q dépend de la pression du flux dans σ et si cette dernière est inconnue, le problème à étudier sera un problème de couplage 1D-3D.
Ce type de problème est fondamental et présente une base d'analyse multi-échelle, notamment en médecine, où le milieu poreux $\mathcal{O}$ représente le tissu interstitiel qui entoure le réseau capillaire, tandis que les vaisseaux dans ce réseau sont décrits par des structures tubulaires.
L'analyse de certaines méthodes des éléments finis d'approximation de ces problèmes peut être trouvée dans [41, 4, 3] (en dimension deux) et dans [16, 15] (en dimension trois).
L'analyse mathématique de ce type de problème a besoin d'outils non standards, du fait que la conservation de la masse sur l'interface entre le milieux poreux et la variété unidimensionnelle doit être prise en considération et la solution du problème mathématique associé ne peut donc être dans $\mathring{H}^1(\mathcal{O})$.

Ainsi, si la solution appartient à l'espace de Sobolev avec poids, une approche de Galerkin peut être effectuée et une estimation d'erreur a été obtenue dans le Corollaire 3.8 de [15], sous une régularité améliorée de la solution dans une échelle d'espaces de Sobolev avec poids (le poids étant la distance à σ). Dans [15], l'auteur prend cette régularité améliorée comme acquise. Par conséquent, notre objectif principal est de prouver un tel résultat de régularité pour certaines situations modèles. Plus précisément, nous nous limitons aux cas où la fracture σ est soit une fracture droite ou une fracture courbe strictement incluse dans le domaine.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux cas où la fracture σ est soit une droite entière, soit une demi-droite ou alors un segment borné. Dans ces situations modèles, on utilise une technique classique qui consiste à effectuer une transformée de Fourier ou de Mellin au problème (1) qui se réduit à un problème de Helmholtz en dimension deux. Pour ce dernier problème, on montre des estimations uniformes dans les espaces de Sobolev standards ou avec poids, qui permettent ensuite de prendre la transformée inverse et d'obtenir le résultat de régularité attendu.
Notons que grâce à la transformée de Laplace, nos résultats obtenus pour le problème de Helmholtz peuvent être aussi utilisés pour l'équation de la chaleur avec un second membre Dirac,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = q(t)\, \delta_\sigma, & \text{dans} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^2$, $\sigma = \mathbb{R}_0^+ \times \{0\}$ et $q \in L^2(\sigma)$. Ceci permet d'améliorer quelques résultats de [29].
Un tel problème apparaît dans le contrôle optimal des problèmes paraboliques avec contrôle ponctuel. Ce dernier peut être utilisé par exemple pour modéliser un potentiel d'un corps électrique avec une charge ponctuelle (voir [22]). Ce type de problème peut être aussi trouvé dans d'autre types d'applications, comme la modélisation des équations de transport pour les rejets de polluants dans les milieux aquatiques (voir [4]). Selon [29], des résultats de régularité d'un tel problème sont d'un grand intérêt pour la convergence du taux de contrôle discret au contrôle continu.

Une extension naturelle de ce travail, est d'étudier la régularité de la solution du problème (1) dans le cas où la fracture est une courbe régulière strictement incluse dans $\mathcal{O}$. Dans [15], par le théorème de Brezzi-Nećas-Babuška (voir [19, Théorème 2.6] ou [34]), en utilisant la condition inf-sup sur $\mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma) \times \mathring{H}^1_{-\alpha}(\mathcal{O};\sigma)$, l'auteur a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution dans $H^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)$ pour $0 < \alpha < 1$ (cfr. Définition 1.1.1).
Notre objectif sera donc de montrer une régularité améliorée, toujours dans les espaces de Sobolev avec poids $V^m_{\alpha+m-1}(\mathcal{O};\sigma)$ pour $m \geq 2$ et $m - \frac{1}{2} < \alpha < m - 1$ (cfr. Définition 1.1.1). Ceci se fait grâce à un argument de localisation et à des estimations a priori sur un recouvrement dyadique du domaine, en plus des résultats obtenus dans [15].

Le manuscrit de cette thèse est divisé en quatre chapitres. L'objectif du premier est de donner un bref rappel des notions de base utilisées tout au long de ce travail. Tout d'abord nous rappelons quelques définitions et propriétés des espaces de Sobolev avec poids. Tout au long de ce chapitre, on démontre certains résultats nécessaires dans le reste du document ou on rappelle d'autres résultats connus avec des références appropriées (le lecteur peut consulter [23, 36, 10] pour plus de détails). Dans la deuxième partie du chapitre, on considère les transformées de Fourier, Laplace et Mellin, en expliquant le lien entre elles et en donnant les propriétés nécessaires de ces transformées : comme avant soit des preuves sont données, soit des références sont citées. On termine ce chapitre en introduisant le nouvel espace $M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ (qui sera l'espace contenant la solution du problème posé au Chapitre 3) avec quelques propriétés utiles pour la suite.

Dans la continuité du Chapitre 1, le Chapitre 2 a pour but d'étudier le problème de Dirichlet sur un cylindre $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne contenant 0,

$$\begin{cases} -\Delta u &= q\delta_\sigma, \quad \text{dans} \quad Q, \\ \quad u &= 0, \quad\;\; \text{sur} \quad \partial Q, \end{cases} \tag{4}$$

où $\sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$ représente une fracture infinie de Q et $q \in L^2(\sigma)$. De même, l'équation de la chaleur avec un second membre Dirac s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = q(t)\;\delta_\sigma, & \text{dans} \quad \mathbb{R}^+_0 \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+_0 \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne contenant 0, $\sigma = \mathbb{R}^+_0 \times \{0\}$ et $q \in L^2(\mathbb{R}^+_0)$.
Une application de la transformée de Fourier partielle en z (resp. de Laplace en t) au problème (4) (resp. (5)) permet de le résoudre en résolvant l'équation de Helmholtz en dimension deux avec un paramètre complexe $k \in \mathbb{C}$ et un second membre qui contient la masse de Dirac,

$$\begin{cases} -\Delta U + k^2 U &= \delta_0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \;\; U &= 0, \quad\; \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Pour ce dernier, sous certaines conditions sur k, on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Sobolev avec poids $V^1_\alpha(\Omega;0)$ (le poids étant la distance à l'origine). De plus on prouve des estimations uniformes en k sous la forme

$$\sum_{l=0}^{m} (1+|k|^2)^l \|U\|^2_{V^{m-l}_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1. \tag{7}$$

Ceci se fait à l'aide des fonctions de Hankel H_k (voir Définition 2.1.5), sachant que ces fonctions sont des solution fondamentales de l'équation de Helmholtz. On donne donc d'abord les définitions et les propriétés de ces fonctions et on prouve le même type d'estimation que (7),

$$\sum_{l=0}^{m}(1+|k|^2)^l\|H_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \lesssim 1. \tag{8}$$

Ensuite, en utilisant une fonction de troncature η qui est nulle au voisinage de zéro, U peut être décomposée sous la forme

$$U = (1-\eta)H_k + w_k,$$

avec w_k la solution d'un problème de Helmholtz mais cette fois avec un second membre plus régulier (dans $H^{m-2}(\Omega)$ pour $m \geq 2$). On prouve qu'elle vérifie le même type d'estimation pour obtenir (7).
Une application de la transformée de Fourier inverse partielle en z (resp. transformée de Laplace inverse) permet de déduire le résultat pour le problème (4) (resp. (5)).

Notons aussi que, sur un cylindre tronqué $Q = \Omega \times (0, \pi)$, un développement en série de Fourier par rapport à la 3ème variable dans la base $(\sin(\cdot k))_{k\in\mathbb{N}^*}$, appliqué au problème (4) permet de le résoudre en utilisant les résultats obtenus pour le problème de Helmholtz (6).

Dans le Chapitre 3, on considère toujours l'équation de Laplace mais cette fois sur $\mathbb{R}^3$, avec une fracture σ qui est une demi-droite de $\mathbb{R}^3$ et un terme volumique additionnel dans le second membre,

$$-\Delta u = q\delta_\sigma + h, \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \tag{9}$$

où $q \in L^2_\epsilon(\sigma; 0)$ et $h \in V^0_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3; 0)$ avec $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.
En appliquant la transformée de Mellin $\mathfrak{M}$, résoudre le problème (9) revient à résoudre le problème de Helmholtz défini sur la sphère unité S^2

$$-(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)U = \mathfrak{M}[q]\delta_B + \mathfrak{M}[h], \text{ dans} \quad S^2,$$

où L_{S^2} est l'opérateur de Laplace Beltrami, B est le point d'intersection de la sphère avec la demi-droite et $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$, avec $\xi \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.
Cette solution U peut être décomposée sous la forme

$$U = -v_\lambda\mathfrak{M}[q] - w_\lambda, \tag{10}$$

où v_λ est solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)v_\lambda = \delta_B, \quad \text{dans} \quad S^2,$$

et w_λ est solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)w_\lambda = \mathfrak{M}[h], \quad \text{dans} \quad S^2. \tag{11}$$

Ainsi, en utilisant une fonction de troncature η qui est nulle au voisinage de B, v_λ peut être aussi décomposée comme dans le Chapitre 2, sous la forme

$$v_\lambda = (1-\eta)H_\lambda + \tilde{w}, \tag{12}$$

avec H_λ les fonctions de Hankel données par la Définition 2.1.5, et $\tilde{w}$ la solution du problème de Helmholtz défini sur la sphère unité S^2 et avec un second membre $\tilde{h}$ dans $L^2(S^2) \cap V_\alpha^{m-2}(S^2; B)$ pour $m \geq 2$.
Pour ce dernier, si $0 < \alpha < 1$, on prouvera d'abord l'existence et l'unicité d'une solution $\tilde{w}$ dans $V_\alpha^1(S^2; B)$, ensuite en utilisant l'argument d'ajout d'une variable, on trouvera des estimations uniformes en λ, légèrement différentes par rapport aux précédentes :

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|\tilde{w}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda|^{2l} \|\tilde{h}\|^2_{V_\alpha^{m-2-l}(S^2;B)} + \|\tilde{h}\|^2_{0,S^2}. \tag{13}$$

En vérifiant que le second membre de (13) est borné uniformément en λ et en se souvenant de (12) et (8), on obtient

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|v_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim 1.$$

D'autre part, grâce aux propriétés de la transformée de Mellin, on trouve de nouveau que w_λ, solution de (11) vérifie bien l'estimation (13). Donc en se rappelant de (10), U satisfait

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|U\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim |\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2 + \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda|^{2l} \|\mathfrak{M}[h]\|^2_{V_\alpha^{m-2-l}(S^2;B)} + \|\mathfrak{M}[h]\|^2_{0,S^2}.$$

Enfin, une simple application de la transformée de Mellin inverse permet de déduire l'existence et l'unicité d'une solution u de (9) vérifiant pour $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, l'estimation

$$\|u\|_{V_\epsilon^1(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \|q\|_{L_\epsilon^2(\sigma;0)} + \|h\|_{V_{1+\epsilon}^0(\mathbb{R}^3;0)}.$$

Pour $m \geq 2$ et $m - \frac{1}{2} < \alpha < m-1$, on montre aussi que la solution vérifie

$$\|u\|_{V_\alpha^m(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \|q\|_{L^2_{\alpha-m+1}(\sigma;0)} + \|h\|_{V_\alpha^{m-2}(\mathbb{R}^3;0)}.$$

Si σ est un segment borné et $\mathcal{O}$ un domaine tridimensionnel régulier, un argument de localisation permet d'étendre les résultats de [15] ainsi que ceux de la première partie de ce chapitre pour résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u &= q\delta_\sigma, \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \quad u &= 0, \quad\ \ \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

A la fin de cette thèse, on termine par la généralisation des résultats précédents au cas où σ est une fracture courbe unidimensionnelle et strictement incluse dans un domaine tridimensionnel borné et régulier $\mathcal{O}$. Pour cela on applique une méthode différente qui consiste à combiner un argument de localisation avec des estimations a priori sur un recouvrement dyadique du domaine. Notons que les résultats obtenus dans [15] garantissent l'existence et l'unicité d'une solution dans $H^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)$.

Par un argument de localisation, on montre l'amélioration de cette régularité d'abord dans un voisinage d'un point intérieur de la fracture σ, et ensuite dans un voisinage des extrémités de σ. Pour cela, on a besoin de quelques théorèmes de shift pour des opérateurs uniformément elliptiques à coefficients variables et dans les espaces de Sobolev avec poids, leurs preuves étant inspirées de [14, 11]. À l'aide d'un difféomorphisme (voir [9]), en redressant la fracture σ localement et en utilisant des recouvrements dyadiques ainsi que les théorèmes de shift déjà signalés, on obtient le résultat escompté.

Chapitre 1

Cadre fonctionnel et propriétés

Sommaire

Dans ce chapitre, on donne des résultats de base utilisés tout au long du travail, certains résultats connus seront rappelés sans preuve mais avec des références appropriées.

Commençons par introduire quelques notations utilisées par la suite. Pour un domaine borné $\mathcal{O}$ à frontière lipschitzienne (ou la sphère unité), des paramètres réels $s \geq 0$ et $p > 1$, la norme usuelle et la semi norme de $W^{s,p}(\mathcal{O})$ sont notées respectivement par $\|\cdot\|_{s,p,\mathcal{O}}$ et $|\cdot|_{s,p,\mathcal{O}}$. Dans le cas $p = 2$ (resp. $s = 0$), on laisse tomber l'indice p (resp. s). On définit aussi

$$\mathring{H}^1(\mathcal{O}) = \{u \in H^1(\mathcal{O}) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\}.$$

Par ailleurs, les notations $A \lesssim B$ et $A \sim B$ signifient l'existence des constantes positives C_1 et C_2, qui sont indépendantes de A et B telles que $A \leq C_2 B$ et $C_1 B \leq A \leq C_2 B$ respectivement. De plus, ces constantes seront indépendantes des paramètres ξ, λ et k introduits plus tard. Ultérieurement, on a besoin de certains résultats dans les espaces de Sobolev standard. Suivant [23, Théorème 1.4.3.3, p. 26], on a :

Théorème 1.0.1. (***Théorème d'interpolation***)
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne. Soient $s' > s'' > s''' \geq 0$ des nombres réels. Il existe, alors, une constante K (qui dépend de Ω, s', s'', s''' et p) telle que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $u \in W^{s',p}(\mathcal{O})$ on a

$$\|u\|_{W^{s'',p}(\mathcal{O})} \leq \epsilon\|u\|_{W^{s',p}(\mathcal{O})} + K\epsilon^{-\frac{s''-s'''}{s'-s''}}\|u\|_{W^{s''',p}(\mathcal{O})}.$$

Corollaire 1.0.2. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, $m \geq 1$ et soit $w \in H^m(\mathcal{O})$. On a*

$$\|w\|_{m,\mathcal{O}} \simeq \|w\|_{0,\Omega} + |w|_{m,\mathcal{O}},$$

où $|\cdot|$ est la semi norme sur $H^m(\mathcal{O})$ définie par $|w|_{m,\mathcal{O}} = \Big(\sum\limits_{|\alpha|=m} \int\limits_{\mathcal{O}} |D^\alpha w(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve : Le cas $m = 1$ est évident. Supposons $m \geq 2$.
D'une part, on sait que

$$\|w\|_{0,\mathcal{O}} + |w|_{m,\mathcal{O}} \leq \|w\|_{m,\mathcal{O}}. \tag{1.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|w\|_{m,\mathcal{O}} &= \|w\|_{0,\mathcal{O}} + \sum_{l=1}^{m-1} |w|_{l,\mathcal{O}} + |w|_{m,\mathcal{O}} \\ &\leq \|w\|_{0,\mathcal{O}} + \sum_{l=1}^{m-1} \|w\|_{l,\mathcal{O}} + |w|_{m,\mathcal{O}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Mais pour $l \in \{1, ..., m-1\}$ on a, grâce au Théorème 1.0.1

$$\|w\|_{l,\mathcal{O}} \leq \epsilon \|w\|_{m,\mathcal{O}} + K\epsilon^{-\frac{l}{m-l}} \|w\|_{0,\mathcal{O}},$$

d'où

$$\sum_{l=1}^{m-1} \|w\|_{l,\mathcal{O}} \leq (m-1)\epsilon \|w\|_{m,\mathcal{O}} + K \sum_{l=1}^{m-1} \epsilon^{-\frac{l}{m-l}} \|w\|_{0,\mathcal{O}}.$$

En choisissant $\epsilon = \frac{1}{m}$ on a

$$\sum_{l=1}^{m-1} \|w\|_{l,\mathcal{O}} \leq \frac{m-1}{m} \|w\|_{m,\mathcal{O}} + K \sum_{l=1}^{m-1} m^{\frac{l}{m-l}} \|w\|_{0,\mathcal{O}}.$$

En introduisant cette inégalité dans (1.2) on obtient

$$\frac{1}{m} \|w\|_{m,\mathcal{O}} \leq \Big(1 + K \sum_{l=1}^{m-1} m^{\frac{l}{m-l}}\Big) \|w\|_{0,\Omega} + |w|_{m,\mathcal{O}}.$$

Par conséquent,

$$\|w\|_{m,\mathcal{O}} \lesssim \|w\|_{0,\mathcal{O}} + |w|_{m,\mathcal{O}}. \tag{1.3}$$

Le résultat se déduit donc de (1.1) et (1.3). ■

Dans la suite, on a besoin des normes dans $H^m(\mathcal{O})$ qui dépendent d'un certain paramètre positif.

Définition 1.0.3. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et m un entier positif. Pour tout*

$\lambda \in]0,\infty[$, *pour tout* $w \in H^m(\mathcal{O})$ *on définit*

$$\|w\|^2_{m,\mathcal{O},\lambda} := \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l} \|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}}.$$

Proposition 1.0.4. *Soit* $\mathcal{O}$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière lipschitzienne et soit* m *un nombre entier positif. Alors pour tout nombre réel* $\lambda \geq 1$ *et tout* $w \in H^m(\mathcal{O})$*, on a*

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{m,\mathcal{O},\lambda} &\simeq \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{m,\mathcal{O}} \\ &\simeq \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l} |w|^2_{m-l,\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

Preuve : Soit l un entier positif tel que $0 \leq l \leq m$.

1. Il est clair que

$$\lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{m,\mathcal{O}} \leq \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l} \|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}} = \|w\|^2_{m,\mathcal{O},\lambda}.$$

Donc pour avoir la première équivalence, il suffit de montrer que

$$\sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l} \|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}} \lesssim \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{m,\mathcal{O}}.$$

En utilisant le théorème d'interpolation (Théorème 1.0.1) avec $s^{'''} = 0$, $s^{''} = m - l$, $s' = m$ et $p = 2$ on obtient une constante $K > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $w \in H^m(\mathcal{O})$,

$$\|w\|_{m-l,\mathcal{O}} \leq \epsilon \|w\|_{m,\mathcal{O}} + K\epsilon^{-\frac{m-l}{l}} \|w\|_{0,\mathcal{O}},$$

donc pour tout $\epsilon > 0$ et tout $w \in H^m(\mathcal{O})$

$$\lambda^{2l}\|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}} \leq 2\epsilon^2\lambda^{2l}\|w\|^2_{m,\mathcal{O}} + 2K^2\lambda^{2l}\epsilon^{-\frac{2(m-l)}{l}} \|w\|^2_{0,\mathcal{O}}.$$

En choisissant $\epsilon = \lambda^{-l}$ et en sommant sur l, on obtient le premier résultat.

2. On sait que pour tout $w \in H^m(\mathcal{O})$ (voir Corollaire 1.0.2),

$$\|w\|_{m,\mathcal{O}} \simeq \|w\|_{0,\mathcal{O}} + |w|_{m,\mathcal{O}}, \tag{1.4}$$

on en déduit, pour $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{m,\mathcal{O}} &\simeq \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + |w|^2_{m,\mathcal{O}} \\ &\simeq (1+\lambda^{2m})\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + |w|^2_{m,\mathcal{O}} \\ &\simeq \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + |w|^2_{m,\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

Mais pour $\lambda \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l} \|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}} &\lesssim \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + \|w\|^2_{m,\mathcal{O}} \quad \text{(grâce à la 1ère équivalence)}\\ &\lesssim \lambda^{2m}\|w\|^2_{0,\mathcal{O}} + |w|^2_{m,\mathcal{O}} \quad \text{(en utilisant l'étape précédente)}\\ &\lesssim \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l}|w|^2_{m-l,\mathcal{O}}.\end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l}|w|^2_{m-l,\mathcal{O}} \leq \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l}\|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}},$$

par conséquent, on a l'équivalence

$$\|w\|^2_{m,\mathcal{O},\lambda} = \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l}\|w\|^2_{m-l,\mathcal{O}} \simeq \sum_{l=0}^{m} \lambda^{2l}|w|^2_{m-l,\mathcal{O}}.$$

∎

Proposition 1.0.5. *Soit $m \geq 2$ un nombre entier et soit $\mathcal{O}$ un domaine de $\mathbb{R}^n$, où $\partial\mathcal{O}$ est de classe $\mathcal{C}^m$.*
Pour tous domaines bornés U_1, U_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que $\overline{U_1} \subset U_2$, soient $\Omega_1 = U_1 \cap \mathcal{O}$ et $\Omega_2 = U_2 \cap \mathcal{O}$. Si $u \in H^1(\Omega_2)$, est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \textit{dans } \Omega_2,\\ u = 0, & \textit{sur } \partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega_2,\end{cases} \tag{1.5}$$

et si $f \in H^{m-2}(\Omega_2)$, alors $u \in H^m(\Omega_1)$ avec l'estimation :

$$\|u\|_{m,\Omega_1} \lesssim \|\Delta u\|_{m-2,\Omega_2} + \|u\|_{1,\Omega_2}.$$

Preuve : Soit u la solution du problème (1.5) et soit $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \eta = 1, & \text{sur } \Omega_3,\\ \eta = 0, & \text{sur } \Omega \backslash \tilde{\Omega}_2,\end{cases}$$

avec
- $\tilde{\Omega}_2$ régulier et tel que $\overline{\tilde{\Omega}}_2 \subset \Omega_2$.
- $\tilde{\Omega}_3$ régulier et tel que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_3 \subset \tilde{\Omega}_2$.

Posons $v = \eta u$, donc v sera la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = \eta f - 2\nabla\eta\nabla u - u\Delta\eta, & \text{dans } \tilde{\Omega}_2,\\ v = 0, & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_2.\end{cases}$$

Comme $u \in H^1(\Omega_2)$ et $f \in L^2(\Omega_2)$, on en déduit donc

$$\eta f - 2\nabla\eta\nabla u - u\Delta\eta \in L^2(\Omega_2) \text{ et donc dans } L^2(\tilde{\Omega}_2).$$

D'où, par [10, Théorème 9.25, p. 298], on déduit $v \in H^2(\tilde{\Omega}_2)$. Par conséquent, $v \in H^2(\Omega_3)$ ou encore $u \in H^2(\Omega_3)$.
On a donc $u \in H^2(\Omega_3)$, satisfait les conditions de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega_3 \cap \partial\Omega$ et $\Delta u \in H^{m-2}(\Omega_3)$. Par application de [11, Théorème 2.3.2, p. 92], on déduit $u \in H^m(\Omega_1)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{m,\Omega_1} \lesssim \|\Delta u\|_{m-2,\Omega_2} + \|u\|_{1,\Omega_2}.$$

∎

1.1 Les espaces de Sobolev à poids

1.1.1 Les espaces $L^2_\alpha(\mathcal{O};P), H^m_\alpha(\mathcal{O};P), V^m_\alpha(\mathcal{O};P)$

Définition 1.1.1. ***Les espaces de Sobolev à poids :***
Soient α un nombre réel quelconque, $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et r la distance à une partie P de $\overline{\mathcal{O}}$ qui sera déterminée plus tard. On désigne par $L^2_\alpha(\mathcal{O};P)$ l'espace de Hilbert des fonctions mesurables u telles que :

$$\|u\|^2_{L^2_\alpha(\mathcal{O};P)} := \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^2 r^{2\alpha}(x)dx < \infty.$$

On définit $D^\gamma u$ comme étant les éléments de $\mathcal{D}'(\mathcal{O}\backslash\bar{P})$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}\backslash\bar{P})$,

$$\langle D^\gamma u, \varphi\rangle = (-1)^{|\gamma|}\langle u, D^\gamma\varphi\rangle.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev avec poids

$$H^m_\alpha(\mathcal{O};P) = \{u \in L^2_\alpha(\mathcal{O};P) \mid \forall|\gamma| \leq m,\ D^\gamma u \in L^2_\alpha(\mathcal{O};P)\}.$$

Ce dernier est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{H^m_\alpha(\mathcal{O};P)} = \left(\sum_{k=0}^{m} |u|^2_{H^k_\alpha(\mathcal{O};P)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où la semi norme sur $H^k_\alpha(\mathcal{O};P)$ est définie par

$$|u|_{H^k_\alpha(\mathcal{O};P)} = \left(\sum_{|\gamma|=k} \|D^\gamma u\|^2_{L^2_\alpha(\mathcal{O};P)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De façon similaire, l'espace de Sobolev avec poids de type ***Kondratiev*** *est défini par*

$$V_\alpha^m(\mathcal{O};P) = \{u \in L^2_{\alpha-m}(\mathcal{O};P) \mid \forall|\gamma| \leq m,\ r^{\alpha-m+|\gamma|}D^\gamma u \in L^2(\mathcal{O})\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|u\|_{V_\alpha^m(\mathcal{O};P)} = \left(\sum_{|\gamma|\leq m} \int_{\mathcal{O}} |D^\gamma u(x)|^2 r^{2(|\gamma|+\alpha-m)}(x)dx \right)^{1/2},$$

et notons la semi-norme :

$$|u|_{V_\alpha^m(\mathcal{O};P)} = \left(\sum_{|\gamma|=m} \int_{\mathcal{O}} |D^\gamma u(x)|^2 r^{2\alpha}(x)dx \right)^{1/2}.$$

Dans le cas, $\bar{P} \subset \mathcal{O}$, on a besoin aussi de l'espace $\mathring{H}_\alpha^1(\mathcal{O};P)$ (resp. $\mathring{V}_\alpha^1(\mathcal{O};P)$) défini comme étant l'espace des fonctions $v \in H_\alpha^1(\mathcal{O};P)$ (resp. $V_\alpha^1(\mathcal{O};P)$) telles que $\gamma v = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$ où γv dénote la trace de v.

Comme conséquence directe de la définition, on a la relation suivante entre les espaces $V_\alpha^m(\mathcal{O};P)$.

Lemme 1.1.2. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, α un nombre réel et $P \subset \overline{\mathcal{O}}$. Alors pour tout entier m, on a*

$$V_{\alpha+1}^{m+1}(\mathcal{O};P) \hookrightarrow V_\alpha^m(\mathcal{O};P).$$

Preuve : Pour tout $u \in V_{\alpha+1}^{m+1}(\mathcal{O};P)$, on a

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{V_\alpha^m(\mathcal{O};P)} &= \sum_{|\gamma|=0}^{m} \int_{\mathcal{O}} |r^{\alpha-m+|\gamma|}\ D^\gamma u|^2 dx \\
&\leq \sum_{|\gamma|=0}^{m+1} \int_{\mathcal{O}} |r^{(\alpha+1)-(m+1)+|\gamma|}\ D^\gamma u|^2 dx \\
&= \|u\|^2_{V_{\alpha+1}^{m+1}(\mathcal{O};P)}.
\end{aligned}$$

■

Plus tard, on a besoin d'estimer la norme dans les espaces de Sobolev avec poids d'une fonction multipliée par une fonction régulière, plus précisément on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.3. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, α un nombre réel, $m \geq 0$ et $P \subset \bar{\mathcal{O}}$. Soit $\psi \in C^\infty(\overline{\mathcal{O}})$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in V_\alpha^m(\mathcal{O};P)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\psi v \in V_\alpha^m(\mathcal{O};P)$ avec les estimations*

$$\|\psi v\|_{V_\alpha^j(\mathcal{O};P)} \leq C\|v\|_{V_\alpha^j(\mathcal{O};P)}, \quad \forall j \in \{0,...,m\}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=0}^{m} |\lambda|^{2j} \|\psi v\|^2_{V_\alpha^{m-j}(\mathcal{O};P)} \leq C \sum_{j=0}^{m} |\lambda|^{2j} \|v\|^2_{V_\alpha^{m-j}(\mathcal{O};P)}. \tag{1.7}$$

Preuve : Soient $v \in V_\alpha^m(\mathcal{O};P)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$ et soit $0 \leq j \leq m$, alors par la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi v\|^2_{V_\alpha^j(\mathcal{O};P)} &= \sum_{|\beta|\leq j} \int_{\mathcal{O}} |D^\beta(\psi v)|^2 r^{2(\alpha-j+|\beta|)} dx \\
&= \sum_{|\beta|\leq j} \int_{\mathcal{O}} \Big| \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma D^{\beta-\gamma}\psi \; D^\gamma v\Big|^2 r^{2(\alpha-j+|\beta|)} dx \\
&\leq C_1 \sum_{|\beta|\leq j} \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} \|(D^{\beta-\gamma}\psi)^2\|_{L^\infty} \int_{\mathcal{O}} |D^\gamma v|^2 r^{2(\alpha-j+|\beta|)} dx \\
&\leq C \sum_{|\gamma|\leq j} \int_{\mathcal{O}} |D^\gamma v|^2 r^{2(\alpha-j+|\gamma|)} dx \\
&= C\|v\|_{V_\alpha^j(\mathcal{O};P)},
\end{aligned}$$

où la constante C dépend de ψ, ce qui prouve (1.6). En multipliant par $|\lambda|^{2(m-j)}$ et en sommant sur j pour $0 \leq j \leq m$, on obtient la deuxième estimation. ■

On a besoin aussi du résultat technique suivant.

Lemme 1.1.4. *Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi \geq 0$, supp$(\psi) \subset [-1,1]$, ψ est pair et $\int_{-1}^{1} \psi = 1$. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction φ_n définie par*

$$\varphi_n(\xi) = n\psi\Big(n(\xi-\xi_0)\Big), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

vérifie supp$(\varphi_n) \subset [\xi_0 - \frac{1}{n}, \xi_0 + \frac{1}{n}]$ et pour tout $\chi \in C(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\xi)\chi(\xi)d\xi = \chi(\xi_0),$$

en d'autre terme, $\varphi_n \to \delta_{\xi_0}$ au sens des distributions.

Preuve : Par définition, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\xi)\chi(\xi)d\xi = n \int_{\xi_0-\frac{1}{n}}^{\xi_0+\frac{1}{n}} \psi\Big(n(\xi-\xi_0)\Big)\, \chi(\xi)d\xi.$$

En faisant le changement de variable $\eta = n(\xi - \xi_0)$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\xi)\chi(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1} \psi(\eta)\chi(\xi_0 + \frac{\eta}{n})d\eta.$$

Or pour tout $\eta \in [-1,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(\eta)\chi(\xi_0 + \frac{\eta}{n}) = \psi(\eta)\chi(\xi_0)$. De plus, comme $\chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ on en déduit que χ est borné sur $[\xi_0 - 1, \xi_0 + 1]$, et

$$|\psi(\eta)\chi(\xi_0 + \frac{\eta}{n})| \leq \psi(\eta)\|\chi\|_{\mathcal{C}([\xi_0-1,\xi_0+1])} \quad \text{p.p. } \eta \text{ dans } [-1,1].$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir [10, Théorème 4.2, p. 90]), on en déduit donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\xi)\chi(\xi)d\xi &= \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \psi(\eta)\chi(\xi_0 + \frac{\eta}{n})d\eta \\
&= \int_{-1}^{1} \psi(\eta)\chi(\xi_0)d\eta \\
&= \chi(\xi_0).
\end{aligned}$$

■

Rappelons maintenant d'un théorème de shift pour les opérateurs elliptiques dans les espaces de Sobolev avec poids énoncé dans [11, Théorème 7.4.2] (prouvé en utilisant un recouvrement dyadique d'un cône K, ici égale à $\mathbb{R}^2 \backslash \{B\}$, et un argument de localisation, voir aussi [32, Théorème 1.2.8] dans le cas des coefficients constants).

Théorème 1.1.5. *Fixons $m \geq 2$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière de classe $\mathcal{C}^m$. Fixons un point $B \in \mathcal{O}$, un nombre réel α et considérons un opérateur elliptique L d'ordre 2 à coefficients dans $\mathcal{C}^m(\mathcal{O})$. Soit $u \in H^2_{loc}(\mathcal{O}\backslash\{B\})$ la solution du problème*

$$\begin{cases} Lu = f, & \textit{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \ \ u = 0, & \textit{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

telle que

$$u \in V^1_{\alpha-m+1}(\mathcal{O}; B) \quad \textit{et} \quad f \in V^{m-2}_{\alpha}(\mathcal{O}; B).$$

Alors $u \in V^m_\alpha(\mathcal{O}; B)$, avec l'estimation

$$\|u\|_{V^m_\alpha(\mathcal{O};B)} \lesssim \|f\|_{V^{m-2}_\alpha(\mathcal{O};B)} + \|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(\mathcal{O};B)}.$$

1.1.2 Inégalité de Hardy

Définition 1.1.6. *Pour un nombre réel $p > 1$ et un nombre réel quelconque α, on désigne par $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ l'espace des fonctions mesurables u définies sur $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\|u\|^p_{L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)} := \int_0^\infty |u(t)t^\alpha|^p dt < \infty.$$

On définit ensuite l'opérateur L par

$$(Lu)(t) = \frac{1}{t}\int_t^{\infty} u(s)ds.$$

L'inégalité de Hardy se résume dans le théorème suivant.

Théorème 1.1.7. *L'opérateur L est linéaire continu sur $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ ssi $\alpha + \frac{1}{p} > 1$. De plus, sa norme est bornée par $|\alpha + \frac{1}{p} - 1|^{-1}$.*

Preuve : Voir [36, Théorème 1.18, p. 19]. ■

1.1.3 Relations entre les espaces $H_\alpha^m(\mathcal{O}; P)$ et $V_\alpha^m(\mathcal{O}; P)$

Si $\mathcal{O}$ est borné, on obtient directement l'injection $V_\alpha^m(\mathcal{O}; P) \hookrightarrow H_\alpha^m(\mathcal{O}; P)$. Sous certaines conditions sur α, m et P, on obtient l'égalité. Le cas particulier suivant sera utile par la suite.

Proposition 1.1.8. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > m - \frac{n}{2}$ ou $\alpha \le -\frac{n}{2}$, on a*

$$H_\alpha^m(\mathcal{O}; 0) = V_\alpha^m(\mathcal{O}; 0).$$

Le résultat peut être trouvé dans [13, Théorème 3.23] mais pour mieux comprendre la restriction sur α, nous donnons ci-dessus la preuve dans le cas $\alpha > m - \frac{n}{2}$.
Preuve : Il est clair que $V_\alpha^m(\mathcal{O}; 0) \hookrightarrow H_\alpha^m(\mathcal{O}; 0)$. En effet, pour tout $u \in V_\alpha^m(\mathcal{O}; 0)$ on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_\alpha^m(\mathcal{O};0)} &= \sum_{|\beta|\le m} \int_{\mathcal{O}} |r^\alpha \partial^\beta u|^2 dx \\
&= \sum_{|\beta|\le m} \int_{\mathcal{O}} |r^{\alpha-m+|\beta|}\partial^\beta u|^2 r^{2(m-|\beta|)} dx \\
&\lesssim \sum_{|\beta|\le m} \int_{\mathcal{O}} |r^{\alpha-m+|\beta|}\partial^\beta u|^2 dx = \|u\|^2_{V_\alpha^m(\mathcal{O};0)}.
\end{aligned}$$

Reste à prouver que $H_\alpha^m(\mathcal{O}; 0) \hookrightarrow V_\alpha^m(\mathcal{O}; 0)$. Ceci peut être déduit par une application de l'inégalité de Hardy (Théorème 1.1.7). En effet, pour $m = 1$, il faut montrer que pour tout $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$, $H_\alpha^1(\mathcal{O}; 0) \hookrightarrow V_\alpha^1(\mathcal{O}; 0)$.
Soit $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\eta = 1$ sur $B(0, \epsilon)$ et $\eta = 0$ en dehors de $B(0, 2\epsilon)$ avec $B(0, 2\epsilon) \subset \mathcal{O}$.

Soit $r > 0$, comme $\eta u(\cdot, \theta) \in H^1(]r, \infty[)$ pour presque tout θ alors d'après [10, Théorème 8.2, p. 204], on peut écrire

$$\eta u(r, \theta) = -\int_r^{\infty} \frac{\partial}{\partial r}(\eta u)(s, \theta) ds,$$

où (r,θ) sont les coordonnées polaires et r dans ce cas est la distance à l'origine. On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\eta u(r,\theta) &= -\frac{1}{r}\int_r^\infty \frac{\partial}{\partial r}(\eta u)(s,\theta)ds \\ &= -L\left(\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)\right)(r,\theta) \quad \text{(voir Définition 1.1.6).} \end{aligned} \tag{1.8}$$

D'autre part, $\frac{\partial}{\partial r}(\eta u) = \frac{\partial \eta}{\partial r}u + \eta\frac{\partial u}{\partial r}$ donc,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)\right|^2 r^{2\alpha+n-1}drd\theta &\lesssim \max_{(r,\theta)\in Supp(\eta)}\left|\frac{\partial \eta}{\partial r}\right|^2 \|u\|^2_{L^2_\alpha(\Omega;0)} + \max_{(r,\theta)\in Supp(\eta)}|\eta|^2\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\alpha(\Omega;0)} \\ &\lesssim \|\eta\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{H^1_\alpha(\Omega;0)}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on conclut donc que pour presque tout θ,

$$\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)(\cdot,\theta) \in L_{2,\alpha+\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^+),$$

et, par le Théorème 1.1.7, que si $\alpha + \frac{n}{2} > 1$, $L\left(\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)\right)(\cdot,\theta) \in L_{2,\alpha+\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^+)$ et

$$\int_0^\infty \left|L\left(\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)\right)\right|^2 r^{2\alpha+n-1}dr \le \frac{1}{(\alpha+\frac{n}{2}-1)^2}\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial r}(\eta u)\right|^2 r^{2\alpha+n-1}dr.$$

En intégrant en θ (grâce au théorème de Tonelli) et en utilisant (1.8) on obtient

$$\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty\left|\frac{1}{r}(\eta u)(r,\theta)\right|^2 r^{2\alpha+n-1}drd\theta \lesssim \|\eta\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{H^1_\alpha(\mathcal{O};0)},$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\eta u|^2 r^{2(\alpha-1)}dx \lesssim \|\eta\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{H^1_\alpha(\mathcal{O};0)}. \tag{1.10}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}|(1-\eta)u|^2r^{2(\alpha-1)}dx &= \int_{\mathcal{O}\backslash B(0,\epsilon)}|(1-\eta)u|^2r^{2(\alpha-1)}dx \\ &\le \max_{(r,\theta)\in Supp(\eta)}|1-\eta|^2\int_{\mathcal{O}\backslash B(0,\epsilon)}|u|^2r^{2(\alpha-1)}dx \\ &\le \|1-\eta\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{\epsilon^2}\int_{\mathcal{O}\backslash B(0,\epsilon)}|u|^2r^{2\alpha}dx. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Par conséquent, et grâce aux inégalités (1.10) et (1.11), si $\alpha + \frac{n}{2} > 1$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{V^1_\alpha(\mathcal{O};0)} &= \int\limits_\Omega |\eta u|^2 r^{2(\alpha-1)} dx + \int\limits_{\mathcal{O}} |(1-\eta)u|^2 r^{2(\alpha-1)} dx + \int\limits_{\mathcal{O}} \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 r^{2\alpha} dx \\
&\lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\mathcal{O};0)}.
\end{aligned}$$

Pour $m \geq 1$, montrons par récurrence que pour tout $\alpha > m - \frac{n}{2}$, $H^m_\alpha(\mathcal{O};0) \hookrightarrow V^m_\alpha(\mathcal{O};0)$. Comme $\alpha > m - \frac{n}{2} \geq 1 - \frac{n}{2}$, par la première étape on a $H^1_\alpha(\mathcal{O};0) \hookrightarrow V^1_\alpha(\mathcal{O};0)$ et donc

$$\begin{aligned}
u \in H^m_\alpha(\mathcal{O};0) &\Rightarrow \forall \beta \in^n \colon |\beta| \leq m-1, D^\beta u \in H^1_\alpha(\mathcal{O};0) \\
&\Rightarrow \forall \beta \in^n \colon |\beta| \leq m-1, D^\beta u \in V^1_\alpha(\mathcal{O};0) \\
&\Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{N}^n : |\beta| \leq m-1, r^{\alpha-1} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O};0).
\end{aligned}$$

Si β est tel que $|\beta| \leq m-2$, on a par ce qui précède $D^\beta u \in H^1_{\alpha-1}(\mathcal{O};0)$, et par la première étape pour $\alpha - 1 > 1 - \frac{n}{2}$ i.e. $\alpha > 2 - \frac{n}{2}$, on a $D^\beta u \in V^1_{\alpha-1}(\mathcal{O};0)$, donc $r^{\alpha-2} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O})$. De même, si $|\beta| \leq m-3$, $D^\beta u \in H^1_{\alpha-2}(\mathcal{O};0)$, et alors si $\alpha > 3 - \frac{n}{2}$, on a $r^{\alpha-3} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O})$.

Par récurrence, on obtient donc pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, pour tout $j \in \{0,..,m\}$, si $|\beta| \leq m-j$, $r^{\alpha-j} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O})$ dès que $\alpha > j - \frac{n}{2}$.

En particulier, comme $\alpha > m - \frac{n}{2}$, on a montré par récurrence sur $|\beta|$ que si $|\beta| \leq m$ alors

$$r^{\alpha - m + |\beta|} D^\beta u \in L^2(\mathcal{O}),$$

ce qui montre $u \in V^m_\alpha(\mathcal{O};0)$. ■

Remarque 1.1.9. *Observons que ce résultat est vrai seulement dans le cas où P est réduit à un point, ici 0.*

Proposition 1.1.10. *Soient $\mathcal{O}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*
i) Si $\alpha > m - \frac{n}{2}$ ou $\alpha \leq -\frac{n}{2}$, alors $\mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0)$.
ii) Si $-\frac{n}{2} < \alpha \leq m - \frac{n}{2}$ et $m - \frac{n}{2} - \alpha \notin \mathbb{N}$, alors $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $\mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0)$.

Preuve : Soit $u \in \mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0)$. Fixons une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ telle que $\eta = 1$ sur $B(0,\delta)$ et à support dans $B(0,2\delta)$ pour un certain $\delta > 0$.
Alors ηu appartient à $\mathring{H}^m_\alpha(B(0,2\delta);0)$, tandis que $(1-\eta)u$ appartient à $\mathring{H}^m(\mathcal{O} \setminus \overline{B(0,\delta)})$. Comme $\mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \overline{B(0,\delta)})$ est dense dans $\mathring{H}^m(\mathcal{O} \setminus \overline{B(0,\delta)})$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_\ell)_\ell \subset \mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \overline{B(0,\delta)})$ telle que

$$\varphi_\ell \to (1-\eta)u \quad \text{dans } \mathring{H}^m(\mathcal{O} \setminus \overline{B(0,\delta)}) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty.$$

Donc

$$\tilde{\varphi}_\ell \to (1-\eta)u \quad \text{dans } \mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty, \tag{1.12}$$

où $\tilde{\varphi}_\ell \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$ est l'extension de φ_ℓ par zéro dans $B(0,\delta)$.

Il reste à approximer ηu. Dans la première situation, c-à-d. lorsque $\alpha > m - \frac{n}{2}$ ou $\alpha \leq -\frac{n}{2}$, par la Proposition 1.1.8, on a

$$\mathring{H}^m_\alpha(B(0,2\delta);0) = \mathring{V}^m_\alpha(B(0,2\delta);0).$$

Donc en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dans $V^m_\alpha(\mathbb{R}^n;0)$ (voir [32, p. 17]) combinée avec un argument de localisation, on déduit l'existence d'une suite $(\psi_\ell)_\ell \subset \mathcal{D}(B(0,2\delta) \setminus \{0\})$ telle que

$$\psi_\ell \to \eta u \quad \text{dans } \mathring{V}^m_\alpha(B(0,2\delta);0) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty.$$

Alors

$$\tilde{\psi}_\ell \to \eta u \quad \text{dans } \mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty, \tag{1.13}$$

où $\tilde{\psi}_\ell \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$ est l'extension de ψ_ℓ par zéro en dehors de $B(0,2\delta)$.

La combinaison de (1.12) et (1.13) permet de déduire la densité de $\mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$ dans $\mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0)$.

Dans le cas $-\frac{n}{2} < \alpha \leq m - \frac{n}{2}$ et $m - \frac{n}{2} - \alpha \notin \mathbb{N}$, par [13, Théorème 3.23] on obtient directement le décomposition

$$H^m_\alpha(B(0,2\delta);0) = V^m_\alpha(B(0,2\delta);0) \oplus \mathbb{C}.$$

Par conséquent on peut décomposer ηu comme

$$\eta u = \eta(u - u(0)) + \eta u(0),$$

avec $\eta(u-u(0)) \in \mathring{V}^m_\alpha(B(0,2\delta);0)$. Comme avant ceci veut dire qu'on peut construire une suite $(\psi_\ell)_\ell \subset \mathcal{D}(B(0,2\delta) \setminus \{0\})$ telle que

$$\psi_\ell \to \eta(u-u(0)) \quad \text{dans } \mathring{V}^m_\alpha(B(0,2\delta);0) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty.$$

Donc

$$\psi_\ell + \eta u(0) \to \eta u \quad \text{dans } \mathring{H}^m_\alpha(B(0,2\delta);0) \quad \text{lorsque } \ell \to \infty.$$

Ce qui implique

$$\tilde{\psi}_\ell + \eta u(0) \to \eta u \quad \text{dans } \mathring{H}^m_\alpha(\mathcal{O};0) \text{ lorsque } \ell \to \infty. \tag{1.14}$$

On conclut le deuxième résultat de densité par (1.12) et (1.14). ∎

Lemme 1.1.11. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, Q un cylindre de $\mathbb{R}^3$ tel que $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine et σ l'axe des z. Si $\alpha > 0$ ou $\alpha \leq -1$, alors $\mathcal{D}(Q \backslash \sigma)$ est dense dans $H^1_\alpha(Q;\sigma)$.*

Preuve : Soit $d \in H^1_\alpha(Q;\sigma)$. Ceci est équivalent à $r^\alpha d \in H^1(Q)$. En effet, d'une part on a par définition

$$\begin{aligned}\|d\|_{H^1_\alpha(Q;\sigma)} &= \|r^\alpha d\|_{0,Q} + \|r^\alpha \nabla d\|_{0,Q}\\ &\leq \|r^\alpha d\|_{0,Q} + \|r^{\alpha-1} d\|_{0,Q} + \|r^\alpha \nabla d\|_{0,Q} = \|r^\alpha d\|_{1,Q}.\end{aligned}$$

D'autre part, par la Proposition 1.1.8 on trouve

$$H^1_\alpha(Q;\sigma) = \bigcap_{j=0}^{1} H^j(\mathbb{R}, H^{1-j}_\alpha(\Omega;0)) = \bigcap_{j=0}^{1} H^j(\mathbb{R}, V^{1-j}_\alpha(\Omega;0)) = V^1_\alpha(Q;\sigma).$$

Et comme r, la distance à σ est bornée, on a

$$\|r^\alpha d\|_{1,Q} \lesssim \|r^{\alpha-1} d\|_{0,Q} + \|r^\alpha \nabla d\|_{0,Q} \sim \|d\|_{V^1_\alpha(Q;\sigma)} \sim \|d\|_{H^1_\alpha(Q;\sigma)}.$$

Donc en utilisant [12, Lemme 2.5], on déduit pour tout $\epsilon > 0$, l'existence d'une suite $g_n \in \mathcal{D}(Q\backslash\sigma)$ telle que $\|g_n - r^\alpha d\|_{1,Q} \leq \epsilon$. Grâce à l'équivalence des normes déjà montrée, on obtient

$$\|r^{-\alpha} g_n - d\|_{H^1_\alpha(Q;\sigma)} \leq \epsilon.$$

On conclut donc l'existence d'une suite $d_n := r^{-\alpha} g_n \in \mathcal{D}(Q\backslash\sigma)$ telle que d_n converge vers d dans $H^1_\alpha(Q;\sigma)$. ■

Corollaire 1.1.12. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine avec $n \geq 2$. Alors pour tout $\beta \in (0,1)$,*

$$H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2_{-\beta}(\mathcal{O};0).$$

Preuve : Pour $\beta \in (0,1)$, comme $\mathcal{O}$ est borné on a $H^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^1_{1-\beta}(\mathcal{O};0)$ et on conclut par la Proposition 1.1.8 et le Lemme 1.1.2. ■

Corollaire 1.1.13. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine avec $n \geq 2$. Pour $w \in H^2(\mathcal{O})$ et $u \in \mathring{V}^1_\beta(\mathcal{O};0)$ avec $\beta \in (0,1)$, on a*

$$\int_{\mathcal{O}} u\, \Delta w = \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla w. \tag{1.15}$$

Preuve : Par la Proposition 1.1.10, fixons une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{O} \setminus \{0\})$ telle que

$$u_n \to u \quad \text{dans } \mathring{V}^1_\beta(\mathcal{O};0) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Comme u_n appartient à $\mathring{H}^1(\mathcal{O})$, la formule de Green donne

$$\int_{\mathcal{O}} u_n\, \Delta w = \int_{\mathcal{O}} \nabla u_n \cdot \nabla w.$$

Le Corollaire 1.1.12 garantie que $\nabla w \in L^2_{-\beta}(\mathcal{O};0)^n$, donc on peut passer à la limite et obtenir (1.15). ■

Dans le cas d'un domaine non borné, la situation est plus délicate à cause du comportement différent de r petit ou grand. Néanmoins, on a l'injection suivante.

Proposition 1.1.14. *Soient $\alpha > 0$ et σ l'axe des x positifs. Alors on a*

$$H^1_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma) \hookrightarrow V^1_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma).$$

Preuve : Dans le but de prouver ce résultat, on décompose $\mathbb{R}^3$ en trois parties selon le comportement de r. Plus précisément, on utilise la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

avec

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_\sigma \geq 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_\sigma \leq 1 \text{ et } x \leq 0\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; r_\sigma \leq 1 \text{ et } x > 0\}.$$

Observons aussi que l'assertion a lieu si, pour tout $u \in H^1_\alpha(\mathbb{R}^3; \sigma)$, on a $r^{\alpha-1}u \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Étape 1 : Montrons que

$$\|u\|_{V^1_\alpha(\Omega_1,\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\Omega_1,\sigma)}. \tag{1.16}$$

Comme $r_\sigma \geq 1$, on déduit que $r^{\alpha-1} \leq r^\alpha$ et le résultat peut être déduit facilement.

Étape 2 : Montrons que

$$\|u\|_{V^1_\alpha(\Omega_2,\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\Omega_2,\sigma)}. \tag{1.17}$$

Sur Ω_2, observons que r_σ est la distance à $(0, 0, 0)$. Donc à l'aide de l'inégalité de Hardy et comme $\alpha > 0$ en appliquant la Proposition 1.1.8, on déduit le résultat.

Étape 3 : Montrons que

$$\|u\|_{V^1_\alpha(\Omega_3;\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\Omega_3;\sigma)}. \tag{1.18}$$

Fixons $x > 0$. Observons que, sur Ω_3, on a $r_\sigma = \sqrt{y^2 + z^2} \leq 1$ et peut être considéré comme étant la distance à $(0, 0)$ dans le plan avec x fixé.
Fixons une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ qui dépend des variables (y, z) telle que

$$\eta(y, z) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r_\sigma \leq 1\}, \\ 0 & \text{sur } \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r_\sigma \geq 2\}. \end{cases}$$

Notons par (r, θ) les coordonnées polaires dans le plan $y - z$. Alors pour presque tout

$x > 0$ et $\theta \in (0, 2\pi)$, on peut écrire,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_\sigma}(\eta u)(x, r_\sigma e^{i\theta}) &= -\frac{1}{r_\sigma}\int_{r_\sigma}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)(x, te^{i\theta})dt \\
&= -L\left(\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right)(x, r_\sigma e^{i\theta}), \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

où L est donné dans la Définition 1.1.6 et (r_σ, θ) sont les coordonnées polaires en 2D. D'autre part, $\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u) = \frac{\partial \eta}{\partial r_\sigma} u + \eta \frac{\partial u}{\partial r_\sigma}$ donc,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right|^2 r_\sigma^{2\alpha} dydzdx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{S^1}\int_0^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right|^2 r_\sigma^{2\alpha+1} dr_\sigma d\theta dx \\
&\quad \lesssim \int_{\mathbb{R}^+}\int_{S^1}\int_0^{1} |u(x, r_\sigma e^{i\theta})|^2 r_\sigma^{2\alpha} r_\sigma dr_\sigma d\theta dx + \int_{\mathbb{R}^+}\int_{S^1}\int_0^{1} \left|\frac{\partial u}{\partial r_\sigma}\right|^2 r_\sigma^{2\alpha} r_\sigma dr_\sigma d\theta dx,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right|^2 r_\sigma^{2\alpha} dydzdx \lesssim \|u\|^2_{H^1_\alpha(\Omega_3;\sigma)}. \qquad (1.20)$$

En utilisant le théorème de Fubini, on conclut donc que pour presque tout $\theta \in (0, 2\pi)$ et pour presque tout $x > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)(x, \cdot e^{i\theta}) \in L_{2,\alpha+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+),$$

et, par le Théorème 1.1.7, que si $\alpha > 0$, alors $L\left(\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right)(x, \cdot e^{i\theta}) \in L_{2,\alpha+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)$ et

$$\int_0^{\infty} \left|L\left(\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)(x, r_\sigma e^{i\theta}\right)\right|^2 r_\sigma^{2\alpha+1} dr_\sigma \leq \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial r_\sigma}(\eta u)\right|^2 r_\sigma^{2\alpha+1} dr_\sigma.$$

En intégrant en θ et en x (grâce au Théorème de Tonelli) et en utilisant (1.19) et (1.20), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{S^1}\int_0^{\infty} \left|\frac{1}{r_\sigma}(\eta u)(x, r_\sigma e^{i\theta})\right|^2 r_\sigma^{2\alpha+1} dr_\sigma d\theta dx \lesssim \|u\|^2_{H^1_\alpha(\Omega_3;\sigma)},$$

i.e.

$$\|r_\sigma^{\alpha-1} u\|_{0,\Omega_3} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\Omega_3;r_\sigma)}.$$

Et alors si $\alpha > 0$, on conclut par (1.16), (1.17) et (1.18) que

$$H^1_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma) \hookrightarrow V^1_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma).$$

■

1.1.4 Les espaces de Sobolev à poids définis sur la sphère S^2

La sphère unité S^2 est définie par

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Soient σ le demi axe des x positifs et B, le point d'intersection de la sphère avec σ.

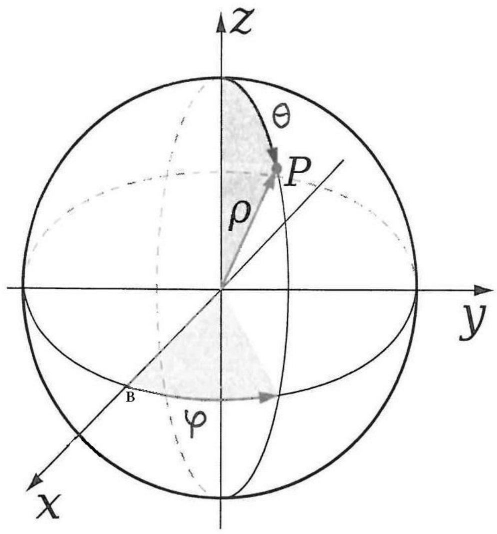

FIGURE 1.1 – La sphère unité S^2

Suivant [11, p. 25], la norme de u dans $L^2(S^2)$ est donnée par

$$\sum_{j=1}^{3} \|(u|_{U_j}) \circ \phi_j^{-1}\|^2_{0,B_j},$$

où pour $j = 1, .., 3$, $\phi_j : U_j \to B_j$ sont des cartes qui recouvrent S^2 (ϕ_j avec $j = 1, .., 3$, est un difféomorphisme de U_j dans B_j) et B_j sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} B_1 =]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\times]\frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[, \\ B_2 =]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\times]\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[, \\ B_3 =]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\times]\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[. \end{cases} \tag{1.21}$$

Soient

$$\phi_1^{-1}(\theta,\varphi) = \phi_3^{-1}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

et

$$\phi_2^{-1}(\theta',\varphi') = (\sin\theta'\cos\varphi', -\cos\theta', \sin\theta'\sin\varphi').$$

où (θ',φ') sont les nouvelles coordonnées de la sphère après une rotation d'axe x et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ de l'ancienne sphère. Par conséquent, par passage aux cartes locales, on est amené

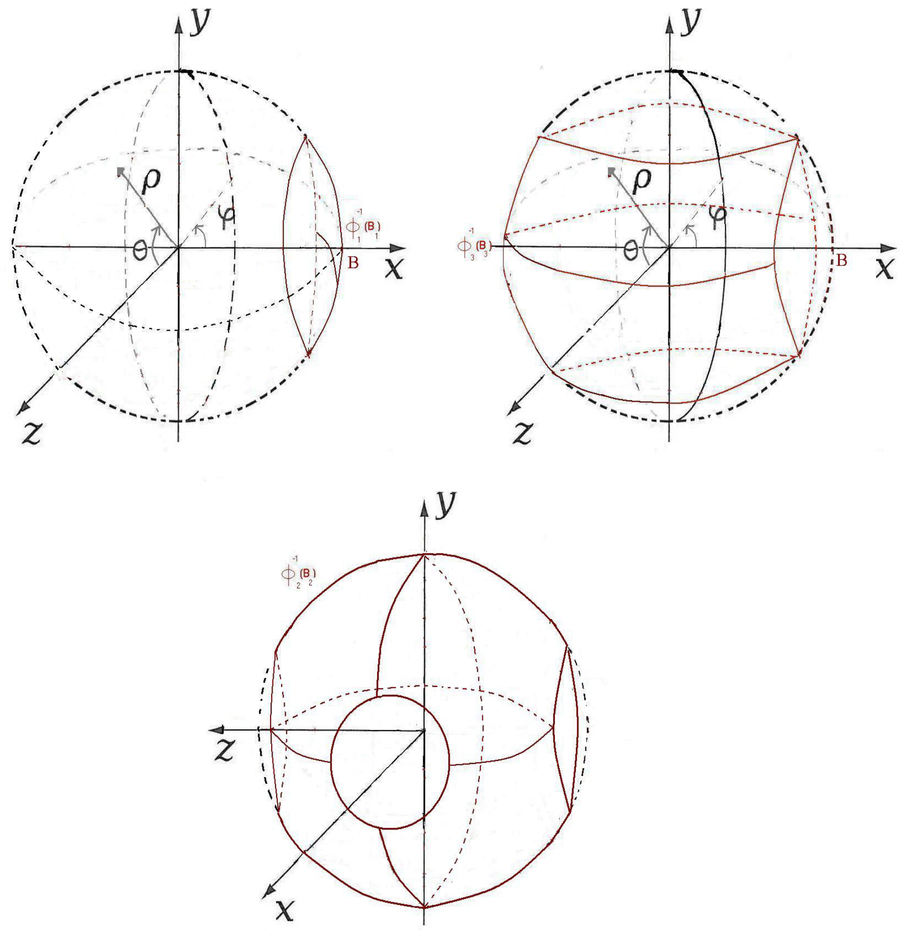

Figure 1.2 – Représentation de la sphère par des cartes locales

à travailler sur des parties de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0,S^2}^2 &= \int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |u(\sin\theta\cos\varphi, -\cos\theta, \sin\theta\sin\varphi)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

De même, pour $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$ on note $\partial^\beta := \partial_\theta^{\beta_1}\partial_\varphi^{\beta_2}$ et on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{m,S^2}^2 &= \sum_{j=1}^{3} \|(u|_{U_j}) \circ \phi_j^{-1}\|_{m,B_j}^2 \\
&= \sum_{|\beta|\leq m} \Bigg(\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, -\cos\theta, \sin\theta\sin\varphi)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi \Bigg).
\end{aligned}$$

Sur les espaces de Sobolev avec poids, avec r la distance angulaire au point B ($r = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$), la définition est donnée par

$$\begin{aligned}
\|u\|_{V_\alpha^m(S^2;B)}^2 &\simeq \sum_{|\beta|\leq m} \Bigg(\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |r^{\alpha-m+|\beta|}\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, -\cos\theta, \sin\theta\sin\varphi)|^2 d\theta d\varphi \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\partial^\beta u(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)|^2 d\theta d\varphi \Bigg).
\end{aligned}$$

Comme dans la Proposition 1.1.8, on a

Proposition 1.1.15. *Soit B un point de S^2. Alors pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > m-1$, on a*

$$H_\alpha^m(S^2; B) = V_\alpha^m(S^2; B).$$

Comme conséquence de la Proposition 1.1.10, on a :

Proposition 1.1.16. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*
i) Si $\alpha > m-1$ ou $\alpha \leq -1$, alors $\mathcal{D}(S^2 \setminus \{B\})$ est dense dans $H_\alpha^m(S^2; B)$.
ii) Si $-1 < \alpha \leq m-1$ et $m-1-\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $\mathcal{D}(S^2)$ est dense dans $H_\alpha^m(S^2; B)$.

Preuve : Soit $u \in H_\alpha^m(S^2; B)$. Fixons une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{D}(S^2)$ telle que $\eta = 1$ sur $B(B, \delta)$ et à support dans $B(B, 2\delta)$ pour un certain $\delta > 0$.
Alors ηu appartient à $\mathring{H}_\alpha^m(B(B, 2\delta); 0)$, tandis que $(1-\eta)u$ appartient à $H^m(S^2 \setminus B(B, \delta))$. Comme $\mathcal{D}(S^2 \setminus B(B, \delta))$ est dense dans $H^m(S^2 \setminus B(B, \delta))$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(S^2 \setminus B(B, \delta))$ telle que

$$\varphi_n \to (1-\eta)u \quad \text{dans } H^m(S^2 \setminus B(B, \delta)) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Donc

$$\tilde{\varphi}_n \to (1-\eta)u \quad \text{dans } H_\alpha^m(S^2; B) \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

où $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{D}(S^2 \setminus \{B\})$ est l'extension de φ_n par zéro dans $B(B, \delta)$.
Pour approximer ηu, il suffit d'appliquer la Proposition 1.1.10 et on conclut directement les deux résultats de densité. ■

1.2 Transformées de Fourier et de Laplace

Définition 1.2.1. *Soit u une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier est donnée, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par*

$$\mathfrak{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

Il est connu que la transformée de Fourier induit un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui même et on a l'égalité de Parseval donnée dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.2. ***(Théorème de Parseval pour la transformée de Fourier)***
Pour toutes fonctions $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, \overline{v(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[u](\xi)\, \overline{\mathfrak{F}[v](\xi)} d\xi.$$

Si $u = v$, alors $\|u\|_{0,\mathbb{R}}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathfrak{F}[u]\|_{0,\mathbb{R}}^2$.

Définition 1.2.3. *De façon similaire, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+)$, sa transformée de Laplace est donnée par*

$$\mathcal{L}[u](p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t) dt,$$

où p est un nombre complexe.

Remarquons que $\mathcal{L}[u](p) = \mathfrak{F}_{t \to \Im p}[u(\cdot) e^{-\Re p \cdot}](\Im p)$.

En utilisant le Théorème de Paley-Wiener [18, 37, 5], la transformée de Laplace est étendue à des fonctions dans les espaces de Sobolev. Notamment si E est un espace de Banach complexe et $s \in [0, \infty)$, on définit d'abord

$$\tilde{H}^s(\mathbb{R}_0^+, E) = \{u \in H^s(\mathbb{R}_0^+, E) \mid \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}, E)\},$$

où $\tilde{u}$ est l'extension de u par 0 en dehors de $\mathbb{R}_0^+$. Cet espace est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\mathbb{R}_0^+, E)} = \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}, E)}.$$

Nous définissons aussi l'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}^+, E)$, l'espace des fonctions holomorphes

$$U : \mathbb{C}^+ := \{p \in \mathbb{C} \,|\, \Re p > 0\} \to E,$$

telles que

$$\|U\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}^+, E)} := \left[\sup_{\eta > 0} \int_{\mathbb{R}} \|f(\eta + i\xi)\|_E^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Alors le Théorème de Paley-Wiener (voir [5, Théorème 1.8.3] pour le cas des valeurs vectorielles) implique le résultat suivant.

Théorème 1.2.4. *Soient E un espace de Hilbert complexe et $s \in [0, \infty)$. Alors la transformée de Laplace définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+, E)$ peut être étendue à une application continue de $\tilde{H}^s(\mathbb{R}_0^+, E)$ dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{C}^+, E)$ et l'application*

$$u \in \tilde{H}^s(\mathbb{R}_0^+, E) \to (1 + \cdot)^s \mathcal{L}_{t \to p}[u] \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}^+, E),$$

est un isomorphisme topologique.

Le résultat suivant est une conséquence directe de l'égalité de Parseval pour la transformée de Fourier (voir Théorème 1.2.2).

Proposition 1.2.5. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+)$ et $\psi \in L^2(0, T)$ pour certains $T > 0$, alors pour tout $\eta > 0$, on a*

$$\int_0^\infty u(t)\, \overline{\tilde{\psi}(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}[u](\eta + i\xi)\, \overline{\mathfrak{L}[\tilde{\psi}](-\eta + i\xi)}\, d\xi,$$

où $\tilde{\psi}$ dénote le prolongement de ψ par zéro en dehors de $(0, T)$.

Remarque 1.2.6. *Observons que ceci implique que la fonction*

$$(0,+\infty) \to \mathbb{C} : \eta \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}[u](\eta + i\xi)\, \overline{\mathfrak{L}[\tilde{\psi}](-\eta + i\xi)}\, d\xi$$

est constante.

Preuve : Pour une fonction $v : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, on définit la fonction $\tilde{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme étant le prolongement de v par 0 en dehors de $\mathbb{R}_0^+$.
Observons que pour $u \in L^2(\mathbb{R}_0^+)$, $\psi \in L^2(0,T)$ on a

$$e^{-\eta \cdot} \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad e^{\eta \cdot} \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Donc on peut facilement déduire par l'égalité de Parseval pour la transformée de Fourier que

$$\int_0^\infty u(t)\overline{\psi(t)}dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-\eta t}\tilde{u}(t)e^{\eta t}\overline{\tilde{\psi}(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[e^{-\eta \cdot}\tilde{u}](\xi)\overline{\mathfrak{F}[e^{\eta \cdot}\tilde{\psi}](\xi)}d\xi.$$

Par les relations entre les transformées de Fourier et de Laplace, on a

$$\mathfrak{F}[e^{-\eta \cdot}\tilde{u}](\xi) = \mathfrak{L}[u](\eta + i\xi) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F}[e^{\eta \cdot}\tilde{\psi}](\xi) = \mathfrak{L}[\tilde{\psi}](-\eta + i\xi),$$

ce qui permet de conclure. ∎

On a besoin aussi de l'information suivante concernant la valeur moyenne de la transformée de Laplace d'une fonction.

Proposition 1.2.7. *Pour $u \in \tilde{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$ et $\eta > 0$, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}[u](\eta + i\xi)\, d\xi = 0$.*

Preuve : Soit $u \in \tilde{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$. D'abord rappelons que, comme $H^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, on a $\tilde{u}(0) = 0$ et, en considérant la suite $(\varphi_n)_n$ définie dans le Lemme 1.1.4 (correspondante à $\xi_0 = 0$), on obtient

$$0 = \tilde{u}(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t)\, \overline{\varphi_n(t)}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty u(t)\, \overline{\varphi_n(t)}\, dt. \tag{1.22}$$

Appliquons la Proposition 1.2.5, on déduit que pour tout $\eta > 0$,

$$\int_0^\infty u(t)\, \overline{\varphi_n(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}[u](\eta + i\xi)\, \overline{\mathfrak{L}[\varphi_n](-\eta + i\xi)}\, d\xi. \tag{1.23}$$

Comme $u \in \tilde{H}^1(\mathbb{R}_0^+)$, on sait par le Théorème 1.2.4 que pour $\eta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |1 + \eta + i\xi|^2 \left|\mathfrak{L}[u](\eta + i\xi)\right|^2\, d\xi < \infty.$$

Utilisons la fait que $\int_{\mathbb{R}} |1+\eta+i\xi|^{-2}\, d\xi < \infty$, on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\mathfrak{L}[u](\eta + i\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$.

Observons que par la définition

$$\mathfrak{L}[\varphi_n](-\eta+i\xi)=\int_0^\infty e^{-(-\eta+i\xi)t}\varphi_n(t)\,dt=\int_0^{1/n}e^{(\eta-i\xi)t}\varphi_n(t)\,dt=\int_0^1 e^{(\eta-i\xi)\frac{s}{n}}\psi(s)\,ds.$$

Ceci implique par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que, pour tout $\eta>0$ et tout $\xi\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}[\varphi_n](-\eta+i\xi)=\int_0^1\psi(s)\,ds=\frac{1}{2}.$$

Comme de plus, pour tout $n\geq 1$, la fonction $|\mathfrak{L}[\varphi_n](-\eta+i\cdot)|$ est bornée par e^η, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[u](\eta+i\xi)\,\overline{\mathfrak{L}[\varphi_n](-\eta+i\xi)}\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[u](\eta+i\xi)\,d\xi. \tag{1.24}$$

La conclusion découle de (1.22), (1.23) et (1.24). ■

1.3 Transformée de Mellin

Définition 1.3.1. *Pour toute fonction u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_0^+)$, sa transformée de Mellin $\mathfrak{M}[u]$ de u est définie pour tout nombre complexe λ par l'intégrale*

$$\mathfrak{M}[u](\lambda)=\int_0^\infty\rho^{-\lambda}u(\rho)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Remarque 1.3.2. *Par le changement de variable $\rho=e^t$, la transformée de Mellin peut être aussi définie par l'intégrale*

$$U(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}u(e^t)dt.$$

Donc si $\lambda=\eta+i\xi$, on voit que $\mathfrak{M}[u](\lambda)$ coïncide avec la transformée de Fourier en ξ de la fonction $t\to e^{-\eta t}u(e^t)$.

De façon similaire, pour un cône K de $\mathbb{R}^n$ de sommet 0 et d'angle solide $G=K\cap S^{n-1}$. Si ρ désigne la distance à l'origine et $\Theta=\frac{x}{\rho}$ sont les coordonnées polaires dans G, alors toute fonction u, à support compact dans K et qui ne contient pas le sommet 0, peut être écrite dans les coordonnées polaires par

$$(\rho,\Theta)\in\mathbb{R}^+\times G\mapsto u(\rho\Theta),$$

et pour tout $\Theta \in G$, sa transformée de Mellin en ρ est donnée par

$$\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta) = \int_0^\infty \rho^{-\lambda} u(\rho\Theta)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Le résultat suivant peut être trouvé dans [17, Prop. AA.27] ou dans [11, Thm 8.1.3].

Théorème 1.3.3. *Soient K un cône de $\mathbb{R}^n$ de sommet 0 et d'angle solide $G = K \cap S^{n-1}$, α un nombre réel et $m \in \mathbb{N}$. On définit*

$$\eta := m - \alpha - \frac{n}{2} \quad \textit{et } R[\eta] := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda = \eta\}.$$

Alors la transformée de Mellin $u \to \mathfrak{M}[u]$ induit un isomorphisme de $V_\alpha^m(K;0)$ dans l'espace des fonctions $U : R[\eta] \times G \to \mathbb{C} : (\lambda,\Theta) \mapsto U(\lambda,\Theta)$ avec la norme finie

$$\left(\int_{\Re\lambda=\eta} \|U(\lambda,\cdot)\|^2_{m,G,|\lambda|} d\Im\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La transformée de Mellin inverse peut être écrite comme

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re\lambda=\eta} \rho^\lambda \mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta) d\Im\lambda, \qquad \textit{avec } x = \rho\Theta.$$

Remarque 1.3.4. *Dans le dernier théorème, si $n = 1$, pour tout $m \geq 1$, on a*

$$\|U\|_{m,G,|\lambda|} \sim (1 + |\lambda|^m)\sum_{x\in G} |U(x)|, \qquad \forall U \in H^m(G).$$

Suivant [17, Appendice A], [27, Lemmes 6.1.3 et 6.1.4], ou [11, Lemme 8.1.1]), on a le lemme suivant qui donne les propriétés de base de la transformée de Mellin.

Lemme 1.3.5. *Soient K un cône de $\mathbb{R}^n$ de sommet 0 et $u \in V_\alpha^m(K;0)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier positif $k \leq m$ et tout multi-indice $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\gamma| \leq m$, on a :*

$$\mathfrak{M}[(\rho\partial_\rho)^k u](\lambda,\Theta) = \lambda^k \mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{M}[(\partial_\Theta)^\gamma u](\lambda,\Theta) = \partial_\Theta^\gamma \mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta), \tag{1.25}$$

pour λ avec $\Re\lambda = m - \alpha - \frac{n}{2}$.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de Parseval pour la transformée de Fourier (voir Théorème 1.2.2).

Théorème 1.3.6. ***Théorème de Parseval pour la transformée de Mellin***

Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *et* $q_1 \in L^2_{\beta_1}(\mathbb{R}^+;0)$, $q_2 \in L^2_{\beta_2}(\mathbb{R}^+;0)$. *Alors on a*

$$\int_0^\infty \rho^{\beta_1+\beta_2} q_1(\rho)\,\overline{q_2(\rho)} d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}[q_1](-\beta_1 - \frac{1}{2} + i\xi)\,\overline{\mathfrak{M}[q_2](-\beta_2 - \frac{1}{2} + i\xi)} d\xi.$$

Preuve : Rappelons que comme pour $q_1 \in L^2_{\beta_1}(\mathbb{R}^+;0)$ (resp. $q_2 \in L^2_{\beta_2}(\mathbb{R}^+;0)$) et par le Théorème 1.3.3 la transformée de Mellin $\mathfrak{M}[q_1](\lambda_1)$ de q_1 (resp. $\mathfrak{M}[q_2](\lambda_2)$ de q_2) est bien définie si $\Re\lambda_1 = -\beta_1 - \frac{1}{2}$ (resp. si $\Re\lambda_2 = -\beta_2 - \frac{1}{2}$).
Rappelons aussi que

$$\mathfrak{M}[q_1](-\beta_1 - \frac{1}{2} + i\xi) = \mathfrak{F}\Big(e^{-(-\beta_1-\frac{1}{2})\cdot} q_1(e^{\cdot})\Big)(\xi),$$

et que

$$\mathfrak{M}[q_2](-\beta_2 - \frac{1}{2} + i\xi) = \mathfrak{F}\Big(e^{-(-\beta_2-\frac{1}{2})\cdot} q_2(e^{\cdot})\Big)(\xi),$$

où $\mathfrak{F}$ désigne la transformée de Fourier.
Dans le but d'appliquer le Théorème 1.2.2, il faut vérifier que

$$e^{(\beta_1+\frac{1}{2})\cdot} q_1(e^{\cdot}) \in L^2(\mathbb{R}),$$

ainsi que

$$e^{(\beta_2+\frac{1}{2})\cdot} q_2(e^{\cdot}) \in L^2(\mathbb{R}).$$

En effet, par le changement de variable $\rho = e^t$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{(\beta_1+\frac{1}{2})t} q_1(e^t)|^2 dt = \int_0^\infty \rho^{2\beta_1} |q_1(\rho)|^2 d\rho,$$

et cette dernière intégrale est finie par hypothèse. On peut donc appliquer le Théorème 1.2.2 et on obtient par ce qui précède

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \rho^{\beta_1+\beta_2} q_1(\rho)\,\overline{q_2(\rho)}\,d\rho &= \int_{\mathbb{R}} e^{(\beta_1+\frac{1}{2})t} q_1(e^t)\, e^{(\beta_2+\frac{1}{2})t}\overline{q_2(e^t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\Big(e^{(\beta_1+\frac{1}{2})t} q_1(e^t)\Big)(\xi)\,\overline{\mathfrak{F}\Big(e^{(\beta_2+\frac{1}{2})t} q_2(e^t)\Big)(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}[q_1](-\beta_1 - \frac{1}{2} + i\xi)\,\overline{\mathfrak{M}[q_2](-\beta_2 - \frac{1}{2} + i\xi)}\,d\xi.
\end{aligned}$$

■

La transformée de Melin induit aussi un autre isomorphisme dans le cas $u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ avec σ l'axe des x positifs.

Théorème 1.3.7. *Soient α un nombre réel, $m \in \mathbb{N}$ et σ l'axe des x positifs de $\mathbb{R}^3$. Soit*

$$\eta := m - \alpha - \frac{3}{2}.$$

Alors la transformée de Mellin $u \to U$ induit un isomorphisme de $V_\alpha^m(\mathbb{R}^3; \sigma)$ dans l'espace des fonctions $U : R[\eta] \times S^2 \to \mathbb{C} : (\lambda, \Theta) \mapsto U(\lambda, \Theta)$ avec la norme finie

$$\left(\int_{\Re\lambda=\eta} \sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|U(\lambda, \cdot)\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} d\Im\lambda \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.26}$$

où B est le point d'intersection de la sphère avec σ.

Preuve : La preuve est basée sur l'application des Théorèmes 1.3.3 et 1.3.6. Comme on va travailler dans les coordonnées sphériques, afin d'éviter toute confusion, on va noter r_σ la distance à σ et ρ la distance à l'origine.
Soit $\gamma \in \mathbb{N}^3$. Rappelons que les dérivées cartésiennes peuvent être écrites en termes des dérivées par rapport aux coordonnées sphériques (voir [32, p. 19]), et qu'on a

$$\rho^{|\gamma|} D^\gamma u = \sum_{l+|\beta| \le |\gamma|} p^{l,\beta}(\theta)(\rho\partial_\rho)^l \partial_\Theta^\beta u,$$

pour certaines fonctions régulières $p^{l,\beta} \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$.
Observons que la distance r_σ est équivalente au produit ρr_B, où r_B est, la distance angulaire au point B, donnée pour x proche de $(1, 0, 0)$ dans la première carte par $r_B = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$.
En effet, au voisinage de $(1, 0, 0)$ (c-à-d. de $\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ dans la première carte), on a

$$\begin{aligned} r_\sigma &= \min_{(x_1,0,0)\in\sigma} \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2} \\ &\sim \sqrt{y^2 + z^2} = \rho\sqrt{\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta}. \end{aligned}$$

Au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$, on a

$$\sin\theta \sim 1, \quad \sin\varphi \sim \varphi \quad \text{ et } \cos\theta \sim -(\theta - \frac{\pi}{2}).$$

Ce qui donne

$$r_\sigma \sim \rho\sqrt{\varphi^2 + (\theta - \frac{\pi}{2})^2} = \rho r_B.$$

Donc, par définition on a

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} &= \sum_{|\gamma|\le m}\int_{\mathbb{R}^3}\Big|(r_B\rho)^{\alpha+|\gamma|-m}D^\gamma u(x,y,z)\Big|^2 dxdydz\\ &= \sum_{|\gamma|\le m}\int_{S^2} r_B^{2(\alpha+|\gamma|-m)}\left(\int_0^\infty \rho^{2(\alpha-m+1)}\Big|\sum_{l+|\beta|\le|\gamma|} p^{l,\beta}(\Theta)(\rho\partial_\rho)^l\partial^\beta_\Theta u(\rho,\Theta)\Big|^2 d\rho\right)d\Theta.\end{aligned}$$

Comme pour tout $l\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N}^{n-1}$ tels que $l+|\beta|\le|\gamma|$, on a $p^{l,\beta}\in\mathcal{C}^\infty(S^2)$, on déduit

$$\|u\|^2_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \sum_{|\gamma|\le m}\int_{S^2} r_B^{2(\alpha+|\gamma|-m)}\left(\int_0^\infty \rho^{2(\alpha-m+1)}\Big|\sum_{l+|\beta|\le|\gamma|}(\rho\partial_\rho)^l\partial^\beta_\Theta u(\rho,\Theta)\Big|^2 d\rho\right)d\Theta.$$

Grâce au Théorème 1.3.3 et le théorème de Fubini, on peut appliquer le théorème de Parseval pour la transformée de Mellin (Théorème 1.3.6) et en utilisant les résultats du Lemme 1.3.5 (voir aussi [32, p. 104]), on obtient :

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} &\lesssim \sum_{|\gamma|\le m}\int_{S^2}\sum_{l+|\beta|\le|\gamma|} r_B^{2(\alpha+|\gamma|-m)}\left(\int_{\Re\lambda=\eta}\Big|\mathfrak{M}[(\rho\partial_\rho)^l\partial^\beta_\Theta u](\lambda,\Theta)\Big|^2 d\Im\lambda\right)d\Theta\\ &= \sum_{|\gamma|\le m}\int_{S^2}\sum_{l+|\beta|\le|\gamma|} r_B^{2(\alpha+|\gamma|-m)}\left(\int_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}|\lambda|^{2l}\Big|\partial^\beta_\Theta\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)\Big|^2 d\Im\lambda\right)d\Theta.\end{aligned}$$

Or, comme $|\gamma|\le m$ et $l+|\beta|\le|\gamma|$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} &\lesssim \sum_{l=0}^m\int_{S^2}\sum_{|\beta|\le m-l} r_B^{2(\alpha+|\beta|-(m-l))}\left(\int_{\Re\lambda=\eta}|\lambda|^{2l}\Big|\partial^\beta_\Theta\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)\Big|^2 d\Im\lambda\right)d\Theta\\ &= \int_{\Re\lambda=\eta}\sum_{l=0}^m|\lambda|^{2l}\Big\|\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\Big\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}d\Im\lambda.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $u\in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et montrons que la norme (1.26) est finie. Par les propriétés de la transformée de Mellin, on a

$$\begin{aligned}&\int_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}\sum_{l=0}^m|\lambda|^{2l}\Big\|M[u](\lambda,\cdot)\Big\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2)}d\Im\lambda\\ &\qquad=\int_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}\sum_{l=0}^m|\lambda|^{2l}\int_{S^2}\sum_{|\beta|\le m-l}|r_B^{\alpha+|\beta|-(m-l)}\partial^\beta_\Theta\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)|^2 d\Theta d\Im\lambda\\ &\qquad=\sum_{l=0}^m\sum_{|\beta|\le m-l}\int_{S^2} r_B^{2(\alpha+|\beta|-m+l)}\int_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}|\mathfrak{M}[(\rho\partial_\rho)^l\partial^\beta_\Theta u](\lambda,\Theta)|^2 d\Im\lambda d\Theta.\end{aligned}$$

Comme $u\in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et grâce au théorème de Fubini, en appliquant l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (Théorème 1.3.6), on obtient donc

$$\int\limits_{\Re\lambda=-\frac{1}{2}-\epsilon} \sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \Big\| \mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\ \Big\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} d\Im\lambda$$
$$= 2\pi \int_0^\infty \sum_{l=0}^{m} \rho^{2(\alpha-m+\frac{3}{2})} \int\limits_{S^2} \sum_{|\beta|\le m-l} r_B^{2(\alpha-m+|\beta|+l)} |(\rho\partial_\rho)^l \partial_\Theta^\beta u|^2 d\Theta \frac{d\rho}{\rho}.$$

Or grâce à la section 8.4.a de [11], pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $l \in \mathbb{N}$, on a

$$(\rho\partial_\rho)^l \partial_\Theta^\beta u = \sum_{|\delta|\le l+|\beta|} q^\delta(\Theta)\rho^{|\delta|} D^\delta u,$$

avec $q^\delta \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ pour tout $\delta \in \mathbb{N}^n$. On en déduit donc que

$$\int\limits_{\Re\lambda=-\frac{1}{2}-\epsilon} \sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \left\| \mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\right\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} d\Im\lambda$$
$$\lesssim \int_0^\infty \sum_{|\beta|+l\le m} \rho^{2(\alpha-m)} \int\limits_{S^2} r_B^{2(\alpha-m+|\beta|+l)} \sum_{|\delta|\le l+|\beta|} |\rho^{|\delta|} D^\delta u|^2 d\Theta \rho^2 d\rho$$
$$\lesssim \int_0^\infty \sum_{|\beta|+l\le m} \sum_{|\delta|\le l+|\beta|} \rho^{2(\alpha-m+|\delta|)} \int\limits_{S^2} r_B^{2(\alpha-m+|\delta|)} |D^\delta u|^2 d\Theta \rho^2 d\rho \sim \|u\|^2_{V_\alpha^m(\mathbb{R}^3;\sigma)}.$$

Comme conclusion, on a

$$\|u\|^2_{V_\alpha^m(\mathbb{R}^3;\sigma)} \simeq \int\limits_{\Re\lambda=-\frac{1}{2}-\epsilon} \sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \Big\| \mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\Big\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} d\Im\lambda.$$

∎

Remarque 1.3.8. *Notons que par le Théorème 1.3.7,* (1.25) *reste vrai pour tout* $u \in V_\alpha^m(\mathbb{R}^3;\sigma)$ *si* σ *est une demi droite,* $k \le m$ *et* $\lambda \in R[m-\alpha-\frac{3}{2}]$.

1.4 Définition et propriétés de l'espace $M_\alpha^1(\mathbb{R}^3;\sigma)$

Dans le but de transformer $\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla\psi}$ en terme de la transformée de Mellin (voir le Lemme 1.4.6), on a besoin d'introduire l'espace $M_\alpha^1(\mathbb{R}^3;\sigma)$.

Définition 1.4.1. *Soit* α *un nombre réel et soit* σ *l'axe des* x *positifs de* $\mathbb{R}^3$*. Alors on définit*

$$M_\alpha^1(\mathbb{R}^3;\sigma) = \{\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \mid \|\psi\|_{M_\alpha^1(\mathbb{R}^3;\sigma)} < \infty\},$$

où

$$\|\psi\|_{M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} := \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (|r^\alpha_\sigma \rho^{-1}\psi|^2 + |r^\alpha_\sigma \nabla\psi|^2) \Bigg)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.27}$$

avec ρ la distance à l'origine, et afin d'éviter toute confusion, on utilise la notation r_σ pour la distance à σ.

Théorème 1.4.2. *Soit α un nombre réel et soient σ l'axe des x positifs de $\mathbb{R}^3$ et B l'intersection de la sphère avec σ. Alors la transformée de Mellin $u \mapsto \mathfrak{M}[u]$ induit un isomorphisme de $M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ dans l'espace de fonctions $U : R[-\alpha-\frac{1}{2}] \times S^2 \to \mathbb{C} : (\lambda, \Theta) \mapsto U(\lambda, \Theta)$ avec la norme finie*

$$\Bigg(\int_{\Re\lambda=-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|U(\lambda,\cdot)\|^2_{H^{1-l}_\alpha(S^2;B)} d\Im\lambda \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : On utilise les mêmes notations comme dans la preuve du Théorème 1.3.7 et on note par $\nabla_T w$ la composante tangentielle du gradient, i.e., $\nabla = \frac{1}{\rho}\nabla_T + \Theta\partial_\rho$, avec $\Theta = \frac{x}{|x|}$. Soit $u \in M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma) \subset V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;0)$. Alors la transformée de Mellin de u existe et est définie sur la droite $\Re\lambda = -\alpha - \frac{1}{2}$. Par définition on a

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg(|r^\alpha_\sigma \rho^{-1} u(x,y,z)|^2 + |r^\alpha_\sigma \nabla u(x,y,z)|^2 \Bigg) dxdydz \\ &\sim \int\limits_{S^2} \int\limits_0^\infty r_B^{2\alpha} \rho^{2\alpha} \Bigg(|u(\rho,\Theta)|^2 + |\rho \frac{\partial}{\partial\rho} u(\rho,\Theta)|^2 |\nabla_T \psi(\rho,\Theta)|^2 \Bigg) d\rho d\Theta. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Fubini, on applique l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (Théorème 1.3.6) et on utilise le Lemme 1.3.5, on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} &\sim \int\limits_{S^2} \int\limits_{\Re\lambda=-\alpha-\frac{1}{2}} r_B^{2\alpha} \Bigg(|\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)|^2 + |\lambda|^2 |\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)|^2 \\ &\qquad + |\nabla_T \mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)|^2 \Bigg) d\Im\lambda d\Theta \\ &= \int\limits_{\Re\lambda=-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\|^2_{H^{1-l}_\alpha(S^2;B)} d\Im\lambda. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.4.3. *Notons que, par le Théorème 1.4.2,* (1.25) *reste vrai pour tout $u \in M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ si σ est une demi droite et $\lambda \in R[-\alpha-\frac{1}{2}]$.*

La relation entre $V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et $M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ dépend du signe de α. Si α est négatif, on a juste l'inclusion tandis que si α est positif alors les deux espaces sont les mêmes.

Corollaire 1.4.4. *Soit σ l'axe des x positifs de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\alpha > 0$, on a les injections*

$$V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma) \hookrightarrow M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma) \hookrightarrow V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;0).$$

Preuve : Soit $\psi \in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et vérifions que $\psi \in V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;0)$. En utilisant le fait que la distance angulaire r_B est bornée, on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\rho^{-\alpha-1}\psi|^2 \quad \lesssim \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_{S^2} |\rho^{-\alpha-1} r_B^{-\alpha}\psi|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |r_\sigma^{-\alpha}\rho^{-1}\psi|^2 < \infty,$$

ainsi que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\rho^{-\alpha}\nabla\psi|^2 \quad \lesssim \quad \int\limits_0^\infty |\rho^{-\alpha} r_B^{-\alpha}\nabla\psi|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |r_\sigma^{-\alpha}\nabla\psi|^2 < \infty.$$

On en déduit donc l'injection de $M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$ dans $V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;0)$.

Vérifions maintenant que $V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma) \hookrightarrow M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$. Soit $\psi \in V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$. Comme $V^1_{-\alpha}(S^2;B) \hookrightarrow H^1_{-\alpha}(S^2;B)$ alors par les Théorèmes 1.3.7 et 1.4.2, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^2_{M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)} &\simeq \int\limits_{\Re\lambda=\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|\mathfrak{M}(\psi)(\lambda,\cdot)\|^2_{H^{1-l}_{-\alpha}(S^2;B)} d\Im\lambda \\
&\lesssim \int\limits_{\Re\lambda=\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|\mathfrak{M}(\psi)(\lambda,\cdot)\|^2_{V^{1-l}_{-\alpha}(S^2;B)} d\Im\lambda \\
&\simeq \|\psi\|^2_{V^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.4.5. *Soit σ l'axe des x de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma) = M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma).$$

Preuve : Par la Proposition 1.1.15 on a $H^1_\alpha(S^2;B) = V^1_\alpha(S^2;B)$, et la conclusion découle par les Théorèmes 1.3.7 et 1.4.2. ■

Lemme 1.4.6. *Soient $\alpha > 0$ et σ l'axe des x positifs de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $u \in V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et $\psi \in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, on a*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla\psi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2} \int\limits_{\Re\lambda=-\frac{1}{2}-\alpha} \Big[&\nabla_T \mathfrak{M}(u)(\lambda,\Theta) \cdot \overline{\nabla_T \mathfrak{M}(\psi)(-1-\bar{\lambda},\Theta)} \\
&-(\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}(u)(\lambda,\Theta)\overline{\mathfrak{M}(\psi)(-1-\bar{\lambda},\Theta)}\Big] d\Im\lambda d\Theta.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Remarque 1.4.7. *Rappelons que comme $\alpha > 0$, $V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma) = M^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$.*

Remarque 1.4.8. *Observons que comme $u \in V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$, par le Théorème 1.3.7, sa transformée de Mellin est bien définie sur la droite $\Re\lambda = -\alpha - \frac{1}{2}$. De la même façon si $\psi \in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, par le Théorème 1.4.2, sa transformée de Mellin est bien définie pour $\mu = -1 - \bar{\lambda}$ avec toujours $\Re\lambda = -\alpha - \frac{1}{2}$.*

Preuve : En réécrivant le gradient en coordonnées sphériques on peut écrire

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla\psi} dx = \int\limits_{S^2}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\rho}} + \frac{1}{\rho}\nabla_T u \cdot \frac{1}{\rho}\overline{\nabla_T\psi}\right)\rho^2 d\rho d\Theta, \tag{1.29}$$

où on rappelle que $\nabla_T u$ est la composante tangentielle du gradient, i.e. $\nabla = \frac{1}{\rho}\nabla_T + \Theta\partial_\rho$. Commençons par calculer le premier terme de l'intégrale à droite. Par l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (Théorème 1.3.6), le Lemme 1.3.5 et la Remarque 1.4.3, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\rho}}\,\rho^2 d\rho d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}\Big[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big](-\frac{1}{2} - \alpha + i\xi, \Theta)\overline{\mathfrak{M}\Big[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\Big](-\frac{1}{2} + \alpha + i\xi, \Theta)} d\xi d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\int_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\alpha} \mathfrak{M}[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}](\lambda,\Theta)\overline{\mathfrak{M}[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}](-1-\overline{\lambda},\Theta)} d\Im\lambda d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\int_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\alpha} -\lambda(\lambda+1)\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)\overline{\mathfrak{M}[\psi](-1-\overline{\lambda},\Theta)} d\Im\lambda d\Theta.
\end{aligned}$$

Revenons au deuxième terme de l'intégrale. Comme précédemment, en utilisant l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (Théorème 1.3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2}\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\nabla_T u \cdot \tfrac{1}{\rho}\nabla_T\bar{\psi}\rho^2 d\rho d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}\Big[\nabla_T u\Big](-\frac{1}{2} - \alpha + i\xi, \Theta)\overline{\mathfrak{M}\Big[\nabla_T\psi\Big](-\frac{1}{2} + \alpha + i\xi, \Theta)} d\xi d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2}\int_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\alpha} \mathfrak{M}[\nabla_T u](\lambda,\Theta)\cdot\overline{\mathfrak{M}[\nabla_T\psi](-1-\overline{\lambda},\Theta)} d\Im\lambda d\Theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2}\int\limits_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} \nabla_T\mathfrak{M}(u)(\lambda,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T\mathfrak{M}(\psi)(-1-\bar{\lambda},\Theta)} d\Im\lambda d\Theta.
\end{aligned}$$

Donc (1.28) se déduit directement par (1.29). ∎

Chapitre 2

Problèmes elliptiques avec une fracture infinie et problèmes paraboliques avec donnée sous forme de mesure

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Laplace avec une masse de Dirac dans le second membre, étant donné $q \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche à résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u &= q\delta_\sigma, \quad \text{dans} \quad Q, \\ \quad u &= 0, \quad\ \ \text{sur} \quad \partial Q, \end{cases}$$

où σ représente une fracture unidimensionnelle droite et infinie dans le cylindre Q, ainsi que l'équation de la chaleur, avec un second membre qui contient toujours la masse de Dirac,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= g\delta_0, \quad \text{dans} \quad (0,\infty)\times\Omega, \\ u &= 0, \quad\ \ \text{sur} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) &= 0, \quad\ \ \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

avec $g \in L^2(0,\infty)$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

Une application de la transformée de Fourier (resp. de Laplace) sur l'équation de Laplace (resp. de la chaleur) nous amène à étudier l'équation de Helmholtz en 2D avec un paramètre complexe k et un second membre qui contient la masse de Dirac en un point. Cette dernière peut être résolue en décomposant la solution en une solution fondamentale du problème de Helmholtz qui est la fonction de Hankel, et un reste qui doit être étudié et qui est une solution du problème de Helmholtz mais avec un second membre plus régulier.

2.1 Problème de Helmholtz en dimension 2

2.1.1 Problème de Helmholtz avec un second membre régulier

On commence par un résultat qui peut être déduit par [1, Théorème 4.1], mais la structure simple de l'équation de Helmholtz permet de donner une preuve plus facile que celle dans [1].

Théorème 2.1.1. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, $h \in L^2(\Omega)$ et $k \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$. Alors le problème*

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w & = h, \quad dans \quad \Omega, \\ \quad w & = 0, \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une unique solution variationnelle $w \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Cette solution satisfait

$$\|w\|_{1,\Omega,|k|+1} \lesssim \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.2}$$

De plus, pour tout $m \geq 2$, si $\partial\Omega \in \mathcal{C}^m$ et $h \in H^{m-2}(\Omega)$, alors $w \in H^m(\Omega)$ avec

$$\|w\|_{m,\Omega,|k|+1} \lesssim \|h\|_{m-2,\Omega,|k|+1}. \tag{2.3}$$

Preuve : Notons $k := \eta + i\xi$. La formulation variationnelle du problème (2.1) est

$$\forall v \in \mathring{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \overline{\nabla v} - k^2 \int_\Omega w\, \overline{v} = \int_\Omega h\, \overline{v}. \tag{2.4}$$

Un tel problème a une unique solution par le lemme de Lax-Milgram, comme on a par hypothèse $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$, ce qui implique que $\Re(-k^2) \geq 0$.

Étape 1 : Preuve de (2.2). Choisissons $v = w$ dans (2.4), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 - k^2 \int_\Omega |w|^2 = -\int_\Omega h\, \overline{w}. \tag{2.5}$$

Alors en prenant la partie réelle de cette identité, on trouve

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \Re(-k^2) \int_{\Omega} |w|^2 \leq \|h\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega}.$$

Rappelons que $\Re(-k^2) \geq 0$ et utilisons l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$|w|_{1,\Omega} \lesssim \|h\|_{0,\Omega}, \tag{2.6}$$

aussi bien que

$$\Re(-k^2)\|w\|_{0,\Omega}^2 \leq \|h\|_{0,\Omega}\|w\|_{0,\Omega},$$

ou encore

$$(\xi^2 - \eta^2)\|w\|_{0,\Omega} \leq \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.7}$$

D'autre part, en prenant la partie imaginaire de (2.5), on obtient

$$|\Im(-k^2)|\|w\|_{0,\Omega}^2 \leq \|h\|_{0,\Omega}\|w\|_{0,\Omega},$$

et alors

$$2|\eta||\xi|\|w\|_{0,\Omega} \leq \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.8}$$

Grâce à (2.7), (2.8) et le fait que $|\eta| < |\xi|$ (ce qui implique $|k|^2 \leq \xi^2 - \eta^2 + 2|\eta||\xi|$), on en déduit que

$$|k|^2\|w\|_{0,\Omega} \lesssim \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.9}$$

Cette estimation et l'inégalité (2.6) (en utilisant toujours l'inégalité de Poincaré) donnent

$$(1 + |k|)\|w\|_{0,\Omega} \leq (1 + |k|)^2\|w\|_{0,\Omega} \lesssim (1 + |k|^2)\|w\|_{0,\Omega} \lesssim \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.10}$$

Par la Proposition 1.0.4, en utilisant (2.10) et (2.6) on a directement (2.2).

Étape 2 : Preuve de (2.3). Ceci se fait par itération.

Montrons d'abord que (2.3) est vrai pour $m = 2$. On peut considérer w comme solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = h - k^2 w & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant [10, Théorème 9.25, p. 298] et l'inégalité (2.9), on obtient

$$\|w\|_{2,\Omega} \lesssim \|h\|_{0,\Omega} + |k|^2\|w\|_{0,\Omega} \lesssim \|h\|_{0,\Omega}. \tag{2.11}$$

Comme par la Proposition 1.0.4, on a

$$\|w\|_{2,\Omega,|k|+1} \sim \|w\|_{2,\Omega} + (|k| + 1)^2\|w\|_{0,\Omega}, \tag{2.12}$$

l'estimation (2.3) pour $m = 2$ résulte de (2.10) et (2.11).
Montrons maintenant que si (2.3) est vrai pour ℓ, alors elle reste vrai pour $\ell + 1$.
Comme avant, par la Proposition 1.0.4, on a

$$\|w\|_{\ell+1,\Omega,|k|+1} \simeq \|w\|_{\ell+1,\Omega} + (|k|+1)^{\ell+1}\|w\|_{0,\Omega}. \tag{2.13}$$

En appliquant toujours [10, Théorème 9.25, p. 298], on obtient

$$\begin{aligned} \|w\|_{\ell+1,\Omega} &\leq \|h\|_{\ell-1,\Omega} + |k|^2\|w\|_{\ell-1,\Omega} \\ &\leq \|h\|_{\ell-1,\Omega} + (|k|+1)\|w\|_{\ell,\Omega,|k|+1} \end{aligned}$$

Alors par l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \|w\|_{\ell+1,\Omega} &\lesssim \|h\|_{\ell-1,\Omega} + (|k|+1)\|h\|_{\ell-2,\Omega,|k|+1} \\ &\lesssim \|h\|_{\ell-1,\Omega,|k|+1}. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (2.10), on obtient

$$(|k|+1)^{\ell+1}\|w\|_{0,\Omega} \lesssim (|k|+1)^{\ell-1}\|h\|_{0,\Omega} \lesssim \|h\|_{\ell-1,\Omega,|k|+1}.$$

Ce qui donne (2.3) pour ℓ grâce à (2.13).

■

2.1.2 Les fonctions de Hankel

On commence par quelques propriétés de base des fonctions de Hankel qui peuvent être trouvées dans [25].

Définition 2.1.2. *Si n est un entier, les fonctions de Hankel $H_n^{(1)}(z)$ de type 1 et d'ordre n, sont des fonctions continues sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui satisfont :*

- *$H_n^{(1)}(z)$ est équivalente à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{-\frac{1}{2}}e^{i(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi)}$ si $|z|$ est grand et $-\pi+\delta \leq \arg z \leq \pi-\delta$, où δ est une constante positive assez petite.*
- *Dans un voisinage de $z = 0$ dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $H_n^{(1)}(z)$ est équivalente à*

$$\begin{cases} -\frac{i}{\pi}(n-1)!\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}, & si\ n > 0, \\ \frac{2i}{\pi}\ln z, & si\ n = 0. \end{cases}$$

Proposition 2.1.3. *Soit z un nombre complexe et soit n un entier positif, on a*

$$H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z).$$

Proposition 2.1.4. ***(Dérivation des fonctions de Hankel)***

Pour tout $\ell, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(H_n^{(1)}\right)^{(\ell)}(z) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k C_\ell^k H_{n-\ell+2k}^{(1)}(z).$$

En particulier, on a $\left(H_0^{(1)}\right)'(z) = -H_1^{(1)}(z)$.

Définition 2.1.5. *Pour $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, on définit*

$$H_k(x,y) := \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2}), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},$$

aussi bien que

$$H_0(x,y) := -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

Selon [2, Lemma 2.2.4, p. 98], on a le Lemme suivant.

Lemme 2.1.6. *Pour $k \in \mathbb{C}$, ces fonctions sont les solutions fondamentales du problème de Helmholtz*

$$(\Delta + k^2)H_k = \delta_0, \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{2.14}$$

Preuve : Étape 1 : Montrons que pour $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, H_k est la solution du problème (2.14).
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et soit $R > 0$ tel que $supp(\varphi) \subset B(0,R)$. On a

$$\begin{aligned} \langle(\Delta + k^2)H_k, \varphi\rangle &= \langle H_k, (\Delta + k^2)\varphi\rangle \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{B(0,R)\backslash B(0,\epsilon)} H_k\ (\Delta + k^2)\varphi\ dx. \end{aligned}$$

Par application de la formule de Green et comme $(\Delta + k^2)H_k = 0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ (voir [44]), on obtient

$$\begin{aligned} \langle(\Delta + k^2)H_k, \varphi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_{B(0,R)\backslash B(0,\epsilon)}(\Delta + k^2)H_k\varphi\ dx + \int_{\partial(B(0,R)\backslash B(0,\epsilon))}(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}H_k - \frac{\partial H_k}{\partial\nu}\varphi)\ d\sigma\Big] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left(\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\epsilon,\theta)H_k(\epsilon) - \epsilon\frac{\partial H_k}{\partial r}(\epsilon)\varphi(\epsilon,\theta)\right)d\theta. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ est borné, $H_k(r) \sim \ln(kr)$ au voisinage de zéro et $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon\ln\epsilon = 0$, on déduit que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\epsilon H_k(\epsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\epsilon,\theta)d\theta = 0.$$

Enfin, on conclut donc comme

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\epsilon\frac{\partial H_k}{\partial r}(\epsilon)\varphi(\epsilon,\theta)d\theta \quad = \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\varphi(\epsilon,\theta)d\theta=\varphi(0,0).$$

Étape 2 : Si $k=0$, H_0 est la solution fondamentale du laplacien. En effet, soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et soit $R_1>0$ tel que $supp(\varphi)\subset B(0,R_1)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\langle\Delta\ln r,\varphi\rangle &= \langle\ln r,\Delta\varphi\rangle\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{B(0,R_1)\setminus B(0,\epsilon)}\ln r\ \Delta\varphi\ dx,\end{aligned}$$

Utilisons la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}\langle\Delta\ln r,\varphi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\Bigg(\int_{B(0,R_1)\setminus B(0,\epsilon)}\Delta(\ln r)\ \varphi\ dx+\int_{\partial(B(0,R)\setminus B(0,\epsilon))}(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\ln r-\frac{\partial(\ln r)}{\partial\nu}\varphi)\ d\sigma\Bigg)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\Big(\epsilon\ln\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\epsilon,\theta)-\varphi(\epsilon,\theta)\Big)\ d\theta.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ est borné, et $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon\ln\epsilon=0$, on a

$$\langle\Delta\ln r,\varphi\rangle \quad = \quad -2\pi\varphi(0,0)=-2\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle,$$

donc pour $k=0$, $H_0=-\frac{1}{2\pi}\ln r$ est une solution de (2.14) au sens des distributions. ∎

Proposition 2.1.7. *Soit $k\in\mathbb{C}$ tel que $\frac{\pi}{4}\le\arg k\le\frac{3\pi}{4}$. Alors les solutions fondamentales H_k sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p>1$ et dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p<2$.*

Preuve : Fixons $R>0$ le rayon d'une boule telle que $\Omega\subset B(0,R)$ et rappelons que au voisinage de zéro, on a, par la Définition 2.1.2 et par la Proposition 2.1.4,

$$H_k\sim\ln(kr)\quad\text{ et }\quad\frac{\partial}{\partial r}H_k\sim\frac{1}{r}.$$

Cas 1 : Pour $k\neq 0$, $H_k\in W^{1,p}(\Omega)$ pour $p<2$.

- Montrons d'abord que pour $k\neq 0$, $H_k\in L^p(\Omega)$. En effet, pour ϵ assez petit et

$0 < \mu < \frac{2}{p}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |H_k|^p dx &\lesssim \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} |\ln(kr)|^p r dr d\theta \ + \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |H_0^{(1)}(kr)|^p r dr d\theta \\
&\lesssim \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} |kr|^{-\mu p} r dr d\theta \ + \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |H_0^{(1)}(kr)|^p r dr d\theta \\
&\lesssim \int_0^{\epsilon} r^{-\mu p+1} dr \ + \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |H_0^{(1)}(kr)|^p r dr d\theta \infty,
\end{aligned}$$

car $\int_0^{\epsilon} r^{-\mu p+1} dr < \infty$ dès que $0 < \mu < \frac{2}{p}$ et comme $H_0^{(1)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $\{(x,y) \mid \epsilon \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

- Montrons que pour $k \neq 0$, $\nabla H_k \in (L^p(\Omega))^2$ pour $p < 2$.
  Comme H_k est une fonction radiale, on a seulement à estimer les dérivées par rapport à r. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{R} |\frac{\partial H_k}{\partial r}|^p r dr d\theta &\lesssim \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} r^{1-p} dr \ + \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr)|^p r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} r^{1-p} dr \ + \ |k|^p \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |H_1^{(1)}(kr)|^p r dr d\theta \infty,
\end{aligned}$$

car $\int_0^{\epsilon} r^{1-p} dr < \infty$ dès que $p < 2$ et grâce au fait que $H_1^{(1)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $\{(x,y) \mid \epsilon \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Cas 2 : $H_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ pour $p < 2$.

- Montrons d'abord que $H_0 \in L^p(\Omega)$. En effet, pour ϵ assez petit et $0 < \mu < \frac{2}{p}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |H_0|^p dx dy &\leq \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi}\int_0^{R} |\ln(r)|^p r dr d\theta \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} |r|^{-\mu p} r dr d\theta + \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |\ln(r)|^p r dr d\theta \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_0^{\epsilon} r^{-\mu p+1} dr + \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi}\int_{\epsilon}^{R} |\ln(r)|^p r dr d\theta < \infty,
\end{aligned}$$

car $\int_0^{R} r^{-\mu p+1} dr < \infty$ dès que $0 < \mu < \frac{2}{p}$ et la fonction $r \to r|\ln r|^p$ est continue sur le compact $[\epsilon, R]$.

- Montrons que $\nabla H_0 \in (L^p(\Omega))^2$ pour $p < 2$. Comme dans la première étape, en utilisant le fait que H_0 est une fonction radiale, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla H_0|^p dxdy &\leq \int_0^{2\pi}\int_0^R |\frac{\partial H_0}{\partial r}|^p r dr d\theta \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_0^R r^{1-p} dr < \infty,\end{aligned}$$

car $\int_0^R r^{1-p}dr < \infty$ dès que $p < 2$.

On a donc montré, dans les deux cas, que les solutions fondamentales sont dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $p < 2$. ■

Notons que la preuve ci-dessus ne donne pas l'indépendance en k de la norme L^p (resp. $W^{1,p}$) de H_k, mais en fait on n'en a pas besoin.

Pour la suite, on a besoin d'une certaine régularité des fonctions H_k en termes des espace de Sobolev à poids.

Proposition 2.1.8. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ qui contient l'origine, $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $|k| > 1$ et $\delta \leq \arg k \leq \pi - \delta$ pour un certain $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$.*
La fonction

$$\mathcal{H}_k = \begin{cases} H_k & si \quad |k| > 1, \\ H_0 & si \quad |k| \leq 1, \end{cases}$$

où H_k, défini dans la Définition 2.1.5, et $H_0 := -\frac{1}{2\pi}\ln r$ sont respectivement les solutions fondamentales dans Ω de

$$(\Delta + k^2)H_k = \delta_0 \qquad et \qquad \Delta H_0 = \delta_0,$$

appartient à l'espace $V_\alpha^m(\Omega; 0)$ pour tout $m \geq 1$ et $\alpha > m - 1$. De plus, il existe une constante positive $c(\delta)$ dépendante de δ (mais pas de k) telle que

$$\sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \|\mathcal{H}_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \leq c(\delta). \tag{2.15}$$

Preuve : Notons $k = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |k| > 1$ et $\delta \leq \theta = \arg k \leq \pi - \delta$ pour un certain $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Définissons

$$I(k) = \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \|\mathcal{H}_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)},$$

et $\epsilon = \alpha - (m-1) > 0$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $|k| > 1$, dans ce cas

$$I(k) = \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \int_\Omega \sum_{|\gamma| \leq m-l} |D^\gamma H_k|^2 r^{2\alpha - 2(m-l) + 2|\gamma|} dxdy.$$

Comme H_k est une fonction radiale alors $|D^\gamma H_k| \lesssim |\dfrac{\partial^n H_k}{\partial r^n}|$ avec $n := |\gamma|$. On en déduit

$$\begin{aligned} I(k) &\lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \sum_{n=0}^{m-l} \int_\Omega \Big|\frac{\partial^n}{\partial r^n} H_k\Big|^2 r^{2\alpha-2(m-l)+2n} dxdy \\ &\lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \sum_{n=0}^{m-l} |k|^{2n} \int_0^R \Big|\Big(H_0^{(1)}\Big)^{(n)}(kr)\Big|^2 r^{2\alpha-2(m-l)+2n+1} dr, \end{aligned}$$

où $R > 0$ est fixé suffisamment grand et tel que la boule $B(0, R)$ contient Ω. En effectuant le changement de variables $s = |k|r$, on obtient

$$I(k) \lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \sum_{n=0}^{m-l} |k|^{2(m-l)-2\alpha-2} \int_0^{R|k|} \Big|\Big(H_0^{(1)}\Big)^{(n)}(e^{i\theta}s)\Big|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+2n+1} ds.$$

On aura donc, en se souvenant que $|k| = \rho > 1$ et que $\epsilon = \alpha - m + 1 > 0$,

$$\begin{aligned} I(k) &\lesssim \sum_{l=0}^{m} \sum_{n=0}^{m-l} |k|^{2m-2(\alpha+1)} \int_0^\infty \Big|\Big(H_0^{(1)}\Big)^{(n)}(e^{i\theta}s)\Big|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+2n+1} ds \\ &= \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \int_0^\infty \Big|\Big(H_0^{(1)}\Big)(e^{i\theta}s)\Big|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+1} ds \\ &\quad + \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \sum_{n=1}^{m-l} \int_0^\infty \Big|\Big(H_0^{(1)}\Big)^{(n)}(e^{i\theta}s)\Big|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+2n+1} ds. \end{aligned}$$

Étudions le comportement de l'intégrant dans les deux intégrales près de zéro et de l'infini. Regardons d'abord la première somme. On a pour $0 < \mu < 1$ fixé :
- pour tout $s \in]0, \mu[$ et si $0 < \nu < \epsilon$, $|H_0^{(1)}(e^{i\theta}s)|^2 \lesssim |\ln(e^{i\theta}s)|^2 \lesssim s^{-2\nu}$,
- pour tout $s \in]\mu, \infty[$, $|H_0^{(1)}(e^{i\theta}s)|^2 \sim s^{-1}|e^{ise^{i\theta}}|^2 \sim s^{-1}e^{-2s\sin\theta} \lesssim s^{-1}e^{-2s\sin\delta}$.

On en déduit

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \int_0^\infty \Big|H_0^{(1)}(e^{i\Theta}s)\Big|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+1} ds \\ &\qquad \lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \left(\int_0^\mu s^{-2\nu+2\alpha-2(m-l)+1} ds + \int_\mu^\infty s^{2\alpha-2(m-l)} e^{-2s\sin\delta} ds \right) \\ &\qquad = \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \left(\int_0^\mu s^{-2\nu+2\epsilon+2l-1} ds + \int_\mu^\infty s^{2\epsilon+2l-2} e^{-2s\sin\delta} ds \right). \end{aligned}$$

Pour tout l, les deux intégrales convergent dès que $\nu < \epsilon$.

Regardons la deuxième somme. On a, par la Proposition 2.1.4, si n est impair

$$|(H_0^{(1)})^{(n)}(e^{i\theta}s)|^2 \lesssim \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} |H_{1+2p}^{(1)}(e^{i\theta}s)|^2,$$

et si n est pair

$$|(H_0^{(1)})^{(n)}(e^{i\theta}s)|^2 \lesssim \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} |H_{2p}^{(1)}(e^{i\theta}s)|^2.$$

Comme pour s proche de 0, on a, par la Définition 2.1.2, pour $\nu > 0$,

$$H_\nu^{(1)}(s) \sim s^{-\nu} \quad \text{et} \quad H_0^{(1)}(s) \sim \ln s,$$

et au voisinage de l'infini et tout $\nu \geq 0$,

$$H_\nu^{(1)}(s) \sim s^{-\frac{1}{2}} e^{is},$$

on en déduit, pour tout $n \geq 1$,
- pour tout $s \in]0, \mu[$, $\left|(H_0^{(1)})^{(n)}(e^{i\Theta}s)\right|^2 \lesssim s^{-2n}$,
- pour tout $s \in]\mu, \infty[$, $\left|(H_0^{(1)})^{(n)}(e^{i\Theta}s)\right|^2 \lesssim s^{-1}\ |e^{ise^{i\Theta}}|^2 \lesssim s^{-1}e^{-2s\sin\Theta} \lesssim s^{-1}e^{-2s\sin\delta}$.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \sum_{n=1}^{m-l} \int_0^\infty \left|\left(H_0^{(1)}\right)^{(n)}(e^{i\theta}s)\right|^2 s^{2\alpha-2(m-l)+2n+1} ds \\
&\qquad \lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \left(\int_0^\mu s^{-2n+2\alpha-2(m-l)+2n+1} ds \ + \int_\mu^\infty s^{2\alpha-2(m-l)+2n} e^{-2s\sin\delta} ds \right) \\
&\qquad \lesssim \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \left(\int_0^\mu s^{2\epsilon+2l-1} ds \ + \int_\mu^\infty s^{2\epsilon+2l-2+2n} e^{-2s\sin\delta} ds \right),
\end{aligned}$$

et les deux intégrales convergent. On en déduit donc l'existence d'une constante $c(\delta)$ indépendante de k telle que pour tout $|k| \geq 1$ on a

$$I(k) \leq c(\delta) \sum_{l=0}^{m} |k|^{-2\epsilon} \leq (m+1)c(\delta).$$

Cas 2 : $|k| \leq 1$: Dans ce cas

$$I(k) = \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \int_\Omega \sum_{|\gamma| \leq m-l} |D^\gamma H_0|^2 r^{2\alpha-2(m-l)+2|\gamma|} dx dy.$$

De nouveau comme H_0 est radiale, on obtient pour tout $0 < \nu < \epsilon$ et pour μ assez petit,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\gamma|\leq m-l}\int_{\Omega} |D^{\gamma}H_0|^2\, r^{2\alpha-2(m-l)+2|\gamma|}dxdy \\
&\qquad\lesssim \int_0^{2\pi}\int_0^{R} |\ln r|^2 r^{2\alpha-2(m-l)} r dr d\theta + \sum_{n=1}^{m-l}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} |\frac{\partial^n}{\partial r^n}H_0|^2 r^{2\alpha-2(m-l)+2n} r dr d\theta \\
&\qquad\lesssim \int_0^{\mu} r^{-2\nu+2\epsilon+2l-1}dr + \int_{\mu}^{R} |\ln r|^2 r^{2\alpha-2(m-l)} r dr + \sum_{n=1}^{m-l}\int_0^{R} r^{2\epsilon+2l-1}dr \leq C.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour $|k| \leq 1$,

$$I(k) \leq \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} C \leq (m+1)C.$$

Donc dans les deux cas, on a bien l'estimation (2.15), et en particulier, pour tout $l = 0,..,m$, $\mathcal{H}_k \in V_{\alpha}^{m-l}(\Omega;0)$ avec $\alpha > m-1$. ■

2.1.3 Problème de Helmholtz avec un second membre Dirac

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 \in \Omega$ et soit $k \in \mathbb{C}$ avec $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$. Dans cette sous-section, on considère le problème de Helmholtz avec un second membre Dirac :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_k &= \delta_0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_k &= 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Le cas $k = 0$ est déjà étudié dans [4], où ils ont prouvé l'existence d'une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < 2$. Dans un premier temps, notre but donc est de prouver un résultat similaire pour tout $k \in \mathbb{C}$ vérifiant les hypothèses précédentes, on montre ainsi l'existence d'une unique solution de (2.16) dans $\bigcap_{\alpha>0} \mathring{V}_{\alpha}^{1}(\Omega;0)$. Dans un deuxième temps, on va donner plus de régularité sur u_k en termes d'espaces de Sobolev avec poids.
Pour résoudre un tel problème, pour $|k|$ grand (resp. petit), nous allons décomposer u_k sous la forme $u_k = (1-\eta)H_k + w_k$ (resp. $u_k = (1-\eta)H_0 + w_k$), où on rappelle que la solution fondamentale H_k du problème de Helmholtz est définie dans le Définition 2.1.5, η est une fonction de troncature et w_k est le reste qui doit être étudié.

Corollaire 2.1.9. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne tel que $0 \in \Omega$ et soit $k \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$. Alors le problème (2.16) admet une solution u_k dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < 2$.*

Preuve : Le cas $k = 0$ a été étudié dans [4].

Fixons η une fonction de troncature telle que pour $\delta \in]0, \frac{dist(0,\partial\Omega)}{2}[$ fixé,

$$\begin{cases} \eta = 0 & \text{sur } B(0,\delta), \\ \eta = 1 & \text{sur } B(0,2\delta)^c, \end{cases}$$

et décomposons la solution u_k sous la forme

$$u_k = (1-\eta)\mathcal{H}_k + w_k, \tag{2.17}$$

avec

$$\mathcal{H}_k = \begin{cases} H_k & \text{si } |k| > 1, \\ H_0 & \text{si } |k| \leq 1. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{H}_k$ est solution de

$$(\Delta + k^2)\mathcal{H}_k = \delta_0,$$

on aura donc que u_k est solution de (2.16) si et seulement si w_k est solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)w_k = h_k & \text{dans } \Omega, \\ w_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

où h_k est donné par

$$h_k = \begin{cases} -2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k - \Delta(1-\eta)H_k, & \text{si } |k| > 1, \\ -2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_0 - \Delta(1-\eta)H_0 - k^2(1-\eta)H_0, & \text{si } |k| \leq 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Remarquons que $\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k \in \mathcal{C}(\overline{\Omega\backslash B(0,\delta)})$ et sur $B(0,\delta)$, on a $\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k = 0$, on en déduit

$$\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k \in L^2(\Omega).$$

De même, $\Delta(1-\eta)H_k \in L^2(\Omega)$. Comme $H_0 \in L^p(\Omega)$ pour tout p, on conclut donc que h_k défini par (2.19) est dans $L^2(\Omega)$.

Montrons que le problème (2.18) a une solution faible $w_k \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Sous formulation faible, (2.18) s'écrit, pour tout $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla w_k \cdot \overline{\nabla v} - k^2 \int_\Omega w_k \overline{v} = -\int_\Omega h_k \overline{v}.$$

Posons

$$a(w_k, v) = \int_\Omega \nabla w_k \cdot \overline{\nabla v} - k^2 \int_\Omega w_k \overline{v},$$

et

$$L(v) = -\int_\Omega h_k \overline{v}.$$

On a

- $(\mathring{H}^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ est un espace de Hilbert.
- $a(\cdot,\cdot)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $\mathring{H}^1(\Omega)$. En effet, $\forall w, v \in \mathring{H}^1(\Omega)$

$$|a(w,v)| \leq |w|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + |k|^2\|w\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq (1+|k|^2)\|w\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}.$$

- Il est clair que l'application $L(\cdot)$ est antilinéaire continue (puisque $h_k \in L^2(\Omega)$).
- Grâce à l'inégalité de Poincaré, on a $C > 0$, tel que

$$\Re\Big(a(v,v)\Big) = |v|^2_{1,\Omega} + \Re(-k^2)\|v\|^2_{0,\Omega},$$

  comme $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$ on trouve que $\Re(-k^2) \geq 0$ et alors

$$\Re\Big(a(v,v)\Big) \geq |v|^2_{1,\Omega} \geq C\|v\|^2_{1,\Omega},$$

  ce qui donne la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

En appliquant le lemme de Lax-Milgram, on déduit l'existence et l'unicité de la solution w_k du problème (2.18) dans $\mathring{H}^1(\Omega)$.
Comme $H^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < 2$, on en déduit alors que $w_k \in W^{1,p}_0(\Omega)$ pour tout $p < 2$.
Par conséquent, la solution u_k du problème (2.16), donnée par (2.17), est dans $W^{1,p}_0(\Omega)$ pour tout $p < 2$. ■

Montrons maintenant l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.16) dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$ au sens faible.

Théorème 2.1.10. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne tel que $0 \in \Omega$ et soit $k \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$. Alors le problème (2.16) admet une unique solution u_k dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$, dans le sens qu'elle est l'unique fonction dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$ qui satisfait*

$$\int\limits_\Omega \nabla u_k\, \overline{\nabla v} - k^2 \int\limits_\Omega u_k\, \overline{v} = -\overline{v(0)}, \quad \forall v \in \bigcup_{\alpha>0} \mathring{H}^1_{-\alpha}(\Omega;0). \tag{2.20}$$

De plus, pour tout $\alpha > 0$, u_k satisfait l'estimation

$$\sum_{l=0}^{1}(1+|k|^2)^l\|u_k\|^2_{V^{1-l}_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Remarque 2.1.11. *Rappelons que par la Proposition 1.1.8, pour $\alpha > 0$, $\mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0) = \mathring{H}^1_\alpha(\Omega;0)$.*

Remarque 2.1.12. *Observons que, par [11, Lemme 11.2.2] ou [13, Théorème 3.23], le membre à droite de* (2.20) *est bien défini.*

Preuve : Étape 1 : Existence d'une solution.
Comme dans le Corollaire 2.1.9, à l'aide d'une fonction de troncature η qui est nulle au

voisinage de zéro, la solution u_k est décomposée en $(1-\eta)\mathcal{H}_k$ et w_k (sous la forme (2.17)) avec $w_k \in \mathring{H}^1(\Omega)$ l'unique solution de (2.18).
Pour $\alpha > 0$, par la Proposition 1.1.8, on conclut que $w_k \in \bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{H}^1_\alpha(\Omega;0) = \bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$.
De plus, grâce à la Proposition 2.1.8, comme $\mathcal{H}_k \in \bigcap\limits_{\alpha>0} V^1_\alpha(\Omega;0)$, on déduit que u_k donné par (2.17) est dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$. Comme u_k résout

$$(\Delta + k^2)u_k = \delta_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.21}$$

alors pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \nabla u_k, \nabla v\rangle - k^2\langle u_k, v\rangle = -\overline{v(0)},$$

et on déduit donc que u_k satisfait (2.20) par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathring{H}^1_{-\alpha}(\Omega;0)$ dans le cas $\alpha \in (0,1)$ et par la densité de $\mathcal{D}(\Omega\backslash\{0\})$ dans $\mathring{H}^1_{-\alpha}(\Omega;0)$ dans le cas $\alpha \geq 1$ (voir la Proposition 1.1.10).
Étape 2 : Unicité de la solution.
Supposons que (2.20) admet deux solutions dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$, alors leur différence $d \in \bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;0)$ satisfait

$$\int_\Omega \nabla d \cdot \overline{\nabla v} - k^2 \int_\Omega d\,\overline{v} = 0, \quad \forall v \in \bigcup_{\alpha>0} \mathring{H}^1_{-\alpha}(\Omega;0). \tag{2.22}$$

Observons que $d \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\pi}{4} \leq \arg(-\overline{k}) \leq \frac{3\pi}{4}$. Considérons alors $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} \Delta v + (-\overline{k})^2 v = d, & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad v = 0, & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

donnée par le Théorème 2.1.1, i.e., pour tout $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$, v satisfait

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \overline{\nabla\varphi} - (-\overline{k})^2 \int_\Omega v\,\overline{\varphi} = -\int_\Omega d\,\overline{\varphi}. \tag{2.23}$$

Comme dans le Théorème 2.1.1, par un argument de localisation, on prouve que $v \in H^2_{loc}(\Omega)$. Une application du Corollaire 1.1.12 dans $\Omega_1 \subset \Omega$ permet de déduire que pour $v \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ et pour $\beta \in (0,1)$, on a $v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(\Omega;0)$.

Soit $(d_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $d_n \to d$ dans $\mathring{H}^1_\alpha(\Omega;0)$ et donc aussi dans $L^2(\Omega)$ (l'existence d'une suite $(d_n)_{n\in}$ est garantie grâce à la Proposition 1.1.10), alors par (2.23), on a

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \overline{\nabla d_n} - (-\overline{k})^2 \int_\Omega v\,\overline{d}_n + \int_\Omega d\,\overline{d}_n = 0.$$

Par conséquent, en utilisant (2.22), on déduit que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \overline{\left[\int_\Omega \nabla v \cdot \overline{\nabla d_n} - (-\overline{k})^2 \int_\Omega v\, \overline{d}_n + \int_\Omega d\, \overline{d}_n\right]} = \left[\int_\Omega \overline{\nabla v} \cdot \nabla d - k^2 \int_\Omega \overline{v}\, d + \int_\Omega \overline{d}\, d\right] = \int_\Omega |d|^2.$$

i.e. $d = 0$. Ce qui prouve l'unicité de la solution.

Étape 3 : Estimation.
Soit $\alpha > 0$. Vu la décomposition (2.17), il suffit d'estimer chaque terme de la décomposition.

Pour le premier terme, notamment $(1-\eta)\mathcal{H}_k$, comme conséquence directe du Lemme 1.1.3 et de la Proposition 2.1.8, on a

$$\sum_{l=0}^{1} (1+|k|^2)^l \|(1-\eta)\mathcal{H}_k\|^2_{V_\alpha^{1-l}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Pour le second terme, observons que, grâce à la Proposition 1.1.8, comme Ω est borné et $\alpha > 0$, on a

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow H^1_\alpha(\Omega;0) = V^1_\alpha(\Omega;0),$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{1} (1+|k|^2)^l \|w_k\|^2_{V_\alpha^{1-l}(\Omega;0)} &\lesssim \sum_{l=0}^{1} (1+|k|^2)^l \|w_k\|^2_{1-l,\Omega} \\ &\lesssim \sum_{l=0}^{1} (1+|k|)^{2l} \|w_k\|^2_{1-l,\Omega}. \end{aligned}$$

Et par le Théorème 2.1.1, on a

$$\sum_{l=0}^{1} (1+|k|)^{2l} \|w_k\|^2_{1-l,\Omega} = \|w_k\|^2_{1,\Omega,|k|+1} \lesssim \|h_k\|^2_{0,\Omega}.$$

Ainsi il suffit d'estimer $\|h_k\|^2_{0,\Omega}$.

Dans le cas $|k| \geq 1$, comme $\eta = 0$ sur $B(0,\delta)$, selon (2.19), et en utilisant la Proposition 2.1.8, on déduit que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\|h_k\|^2_{0,\Omega} \sim \|H_k\|^2_{1,\Omega\setminus B(0,\delta)} \lesssim \sum_{l=0}^{1} |k|^{2l} \|H_k\|^2_{V_\alpha^{1-l}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Dans le cas $|k| \leq 1$, grâce au Lemme 2.1.8 pour tout $0 < \epsilon < 1$, on déduit directement que $h_k \in L^2(\Omega)$ avec

$$\|h\|_{0,\Omega} \lesssim |H_0|_{1,\Omega\setminus B(0,\delta)} + \|H_0\|_{0,\Omega} \lesssim |H_0|_{V^1_\epsilon(\Omega\setminus B(0,\delta);0)} + \|H_0\|_{V^0_{\epsilon-1}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Ce qui permet de conclure. ■

Continuons maintenant avec des résultats de régularité pour u_k.

Théorème 2.1.13. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que $0 \in \Omega$ et à frontière de classe $\mathcal{C}^m$ pour certains $m \geq 2$ et $k \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{\pi}{4} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{4}$. Alors la solution u_k du problème (2.16), donnée par le Théorème 2.1.10, appartient à $V_\alpha^m(\Omega; 0)$ pour tout $\alpha > m-1$ avec l'estimation*

$$\sum_{l=0}^{m}(1+|k|^2)^l \|u_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Preuve : Fixons $m \geq 2$ et $\alpha > m-1$. Comme dans la démonstration du Corollaire 2.1.10, on décompose u_k suivant (2.17). Il suffit de vérifier donc la régularité $V_\alpha^m(\Omega; 0)$ et l'estimation pour chaque terme.

Pour le premier terme, notamment $(1-\eta)\mathcal{H}_k$, par une application directe du Lemme 1.1.3 et de la Proposition 2.1.8, on obtient

$$\sum_{l=0}^{m}(1+|k|^2)^l \|(1-\eta)\mathcal{H}_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Pour le second terme, on a besoin de distinguer le cas $|k| > 1$ du cas $|k| \leq 1$. Dans le premier cas, on va prouver que

$$\|w_k\|^2_{m,\Omega,|k|} = \sum_{l=0}^{m} |k|^{2l} \|w_k\|^2_{m-l,\Omega} \lesssim 1, \tag{2.24}$$

ce qui implique que

$$\sum_{l=0}^{m} (1+|k|^2)^l \|w_k\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \lesssim 1, \tag{2.25}$$

grâce à la Proposition 1.1.8 puisque Ω est borné, $\alpha > m-1$ et $|k| > 1$ en plus de l'injection de $H^{m-l}(\Omega)$ dans $H_\alpha^{m-l}(\Omega; 0)$. Dans le second cas, on va prouver que

$$\|w_k\|^2_{V_\alpha^m(\Omega;0)} \lesssim 1, \tag{2.26}$$

ce qui implique encore (2.25) car k est borné. Revenons à l'estimation (2.25).

Premier cas : $|k| > 1$.
Comme on a déjà dit, on a besoin seulement d'estimer (2.24). Mais cette dernière estimation découle directement du Théorème 2.1.1 (en utilisant l'estimation (2.3)) si on montre que

$$\|h_k\|_{m-2,\Omega,|k|} \lesssim 1. \tag{2.27}$$

Comme $h_k = -2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k - \Delta(1-\eta)H_k$, il faut estimer

$$\|\nabla\eta \cdot \nabla H_k\|_{m-2,\Omega,|k|} \quad \text{et} \quad \|\Delta\eta\; H_k\|_{m-2,\Omega,|k|},$$

ce qui, grâce à la proposition 1.0.4, est équivalent à estimer

$$\begin{cases} |k|^{m-2}\|\nabla\eta\cdot\nabla H_k\|_{0,\Omega}, \\ \|\nabla\eta\cdot\nabla H_k\|_{m-2,\Omega}, \\ |k|^{m-2}\|\Delta\eta\, H_k\|_{0,\Omega}, \\ \|\Delta\eta\, H_k\|_{m-2,\Omega}, \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{cases} |k|^{m-2}|H_k|_{1,\Omega\backslash B(0,\delta)}, \\ \|H_k\|_{m-1,\Omega\backslash B(0,\delta)}, \\ |k|^{m-2}\|H_k\|_{0,\Omega\backslash B(0,\delta)}, \\ \|H_k\|_{m-2,\Omega\backslash B(0,\delta)}. \end{cases}$$

Par définition de la norme dans $H^1(\Omega\backslash B(0,\delta))$ et comme

$$H^{m-1}(\Omega\backslash B(0,\delta)) \hookrightarrow H^{m-2}(\Omega\backslash B(0,\delta)),$$

on aura le résultat si on estime

$$(1) : |k|^{m-2}\|H_k\|_{1,\Omega\backslash B(0,\delta)} \quad \text{et} \quad (2) : \|H_k\|_{m-1,\Omega\backslash B(0,\delta)}.$$

Comme on l'a déjà dit, H_k vérifie (2.15).

- En particulier, en considérant le terme correspondant à $l = m-1$ dans (2.15), on obtient
$$|k|^{2m-2}\|H_k\|^2_{V^1_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1,$$
ce qui donne directement (1) puisque $r \simeq 1$ dans $\Omega\backslash B(0,\delta)$ et $|k| > 1$.
- En considérant le terme $l = 1$ dans (2.15), on obtient
$$|k|^2\|H_k\|^2_{V^{m-1}_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1,$$
et donc
$$\|H_k\|^2_{m-1,\Omega\backslash B(0,\delta)} < |k|^2\|H_k\|^2_{m-1,\Omega\backslash B(0,\delta)} \lesssim 1,$$
et (2) est vérifiée pour $|k| > 1$.
On a donc l'estimation voulue sur $\|h_k\|_{m-2,\Omega,|k|}$ et le résultat dans le cas $|k| > 1$ se déduit du Théorème 2.1.1.

Second cas : $|k| \leq 1$. Rappelons que, dans ce cas, h est donné par

$$h_k = -2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_0 - \Delta(1-\eta)H_0 - k^2(1-\eta)H_0.$$

Comme $H_0 \notin \mathring{H}^1(\Omega)$, on ne peut pas utiliser la preuve précédente pour $|k| \leq 1$. On utilise donc un argument itératif en considérant w_k comme solution de

$$\begin{cases} \Delta w_k = h_k - k^2 w_k, & \text{dans } \Omega, \\ w_k = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le but d'appliquer le Théorème 1.1.5 avec $m = 2$ et $\alpha > 1$, on a besoin que

$$w_k \in H^2_{loc}(\Omega \backslash \{0\}) \text{ et que } w_k \in V^1_{\alpha-1}(\Omega; 0),$$

aussi bien que $h_k - k^2 w_k \in V^0_\alpha(\Omega; 0)$ avec

$$\|h_k - k^2 w_k\|_{V^0_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

D'une part, grâce à l'ellipticité forte du laplacien et comme $h_k - k^2 w_k \in L^2(\Omega)$, en appliquant [10, Théorème 9.25 p. 298]) on obtient directement que $w_k \in H^2_{loc}(\Omega \backslash \{0\})$. De plus, comme on a déjà vérifié dans le Théorème 2.1.10, pour $\alpha > 1$ on a $w_k \in V^1_{\alpha-1}(\Omega; 0)$ et satisfait

$$\|w_k\|_{V^1_{\alpha-1}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

D'autre part, par la Proposition 2.1.8 pour $m = 2$, on a $h_k \in V^0_\alpha(\Omega; 0)$ avec

$$\|h_k\|_{V^0_\alpha(\Omega;0)} \lesssim \|H_0\|_{V^1_{\alpha-1}(\Omega;0)} + \|H_0\|_{V^0_\alpha(\Omega;0)} \lesssim \|H_0\|_{V^2_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Et comme $w_k \in V^1_{\alpha-1}(\Omega; 0) \hookrightarrow V^0_{\alpha-2}(\Omega; 0) \hookrightarrow V^0_\alpha(\Omega; 0)$, on obtient

$$\|k^2 w_k\|_{V^0_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Ceci permet donc d'appliquer le Théorème 1.1.5 avec $m = 2$ et $\alpha > 1$ et d'obtenir une régularité $w_k \in V^2_\alpha(\Omega; 0)$ avec l'estimation

$$\|w_k\|_{V^2_\alpha(\Omega;0)} \lesssim \|h_k - k^2 w_k\|_{V^0_\alpha(\Omega;0)} + \|w_k\|_{V^1_{\alpha-1}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Montrons donc par récurrence sur ℓ que si pour $\ell \in \{3, \ldots, m\}$ et $\alpha > \ell - 2$, on a $w_k \in V^{\ell-1}_\alpha(\Omega; 0)$ avec

$$\|w_k\|_{V^{\ell-1}_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1,$$

alors pour $\alpha > \ell - 1$, $w_k \in V^\ell_\alpha(\Omega; 0)$ et satisfait

$$\|w_k\|_{V^\ell_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

Ceci se fait à l'aide du Théorème 1.1.5, et donc il suffit de vérifier que pour $\alpha > \ell - 1$, on a $h_k - k^2 w_k \in V^{\ell-2}_\alpha(\Omega; 0)$ et satisfait

$$\|h_k - k^2 w_k\|_{V^{\ell-2}_\alpha(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

En effet, par l'hypothèse qu'on a mis et grâce à la Proposition 2.1.8, on a

$$\begin{aligned}\|h_k - k^2 w_k\|_{V_\alpha^{\ell-2}(\Omega;0)} &\lesssim \|h_k\|_{V_\alpha^{\ell-2}(\Omega;0)} + |k|^2 \|w_k\|_{V_\alpha^{\ell-2}(\Omega;0)} \\ &\lesssim \|H_0\|_{V_\alpha^{\ell-1}(\Omega;0)} + \|w_k\|_{V_\alpha^{\ell-1}(\Omega;0)} \lesssim 1.\end{aligned}$$

Rappelons que par le Théorème 2.1.10, pour $\alpha > \ell - 1$, $w_k \in V^1_{\alpha-\ell+1}(\Omega; 0)$ et satisfait

$$\|w_k\|_{V^1_{\alpha-\ell+1}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

En appliquant donc le Théorème 1.1.5, on conclut que $w_k \in V_\alpha^\ell(\Omega; 0)$ avec

$$\|w_k\|_{V_\alpha^\ell(\Omega;0)} \lesssim \|h_k - k^2 w_k\|_{V_\alpha^{\ell-2}(\Omega;0)} + \|w_k\|_{V^1_{\alpha-\ell+1}(\Omega;0)} \lesssim 1.$$

■

2.2 Applications à un problème elliptique et à un problème parabolique

2.2.1 L'équation de Laplace sur un domaine tridimensionnel avec une fracture infinie

Soit Q un cylindre de $\mathbb{R}^3$ donné par $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ qui contient 0. Notons par σ l'axe des z (qui est inclus dans Q).
Comme on l'a déjà mentionné la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v &= q\,\delta_\sigma \quad \text{dans} \quad Q, \\ \quad v &= 0 \quad\ \ \text{sur} \quad \partial Q, \end{cases} \tag{2.28}$$

ne peut pas être dans $\mathring{H}^1(Q)$ puisque le second membre de ce problème n'est pas dans son dual. Mais inspiré de [15], on va prouver le résultat suivant.

Théorème 2.2.1. *Soit Q un cylindre de $\mathbb{R}^3$ donné par $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et tel que $0 \in \Omega$. Notons par σ l'axe des z. Soit $q \in L^2(\mathbb{R})$. Alors le problème (2.28) a une unique solution $v \in \bigcap_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(Q;\sigma)$, dans le sens qu'elle est l'unique fonction dans $\bigcap_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega;\sigma)$ qui satisfait*

$$\int_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla \varphi} = \int_{\mathbb{R}} q(z)\overline{\varphi(0,0,z)}\,dz, \quad \forall \varphi \in \bigcup_{\alpha>0} \mathring{H}^1_{-\alpha}(Q;\sigma). \tag{2.29}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et α un nombre réel tel que $\alpha > m-1$, si on suppose que la frontière de Ω est de classe $\mathcal{C}^m$, alors cette unique solution appartient à $V^m_\alpha(Q;\sigma)$ avec *l'estimation*

$$\|v\|_{V_\alpha^m(Q;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\mathbb{R}}. \tag{2.30}$$

Remarque 2.2.2. *Comme dans la définition de $V_\alpha^1(Q;\sigma)$, r désigne la distance à σ et on a $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Remarque 2.2.3. *Notons que selon [16, Théorème 4.2], toute fonction $\varphi \in H^1_{-\alpha}(Q;\sigma)$ admet une trace $\gamma_\sigma\varphi \in L^2(\sigma)$ sur σ (qui coïncide avec la restriction à σ si φ est continue). Ce qui donne sens à* (2.29)*.*

Remarque 2.2.4. *Remarquons que par la forme particulière de Q et σ, on a par la Proposition 1.1.8 que pour $\alpha > m-1$ ou $\alpha \leq -1$,*

$$V_\alpha^m(Q;\sigma) = \bigcap_{j=0}^{m} H^j(\mathbb{R}, V_\alpha^{m-j}(\Omega;0)) = \bigcap_{j=0}^{m} H^j(\mathbb{R}, H_\alpha^{m-j}(\Omega;0)) = H_\alpha^m(Q;\sigma).$$

Remarque 2.2.5. *Si v est solution de* (2.28) *qui a la bonne régularité, en appliquant la transformée de Fourier partielle en z à* (2.28)*, on observe que $V := \mathfrak{F}_z[v]$ est solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta V + \xi^2 V &= \mathfrak{F}[q](\xi)\delta_0, \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad V &= 0, \qquad\qquad\quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathfrak{F}[q]$ est la transformée de Fourier de q. Par les résultats de la section précédente, on déduit que

$$V(x,y,z) = -\mathfrak{F}[q](\xi)\; u_{i|\xi|}(x,y),$$

où $u_{i|\xi|}$ est l'unique solution de (2.16)*.*

Preuve : Par le remarque précédente, définissons $V(x,y,z) = -\mathfrak{F}[q](\xi)\; u_{i|\xi|}(x,y)$, où $u_{i|\xi|}$ est l'unique solution de (2.16) et posons $v = \mathfrak{F}_z^{-1}[V]$ avec $\mathfrak{F}_z$ désigne la transformée de Fourier partielle en z.

Étape 1 : Régularité de la solution.

On sait que $v \in V_\alpha^m(Q;\sigma)$ si et seulement si

$$\int_Q \sum_{|\beta|\leq m} |D^\beta v(x,y,z)|^2 r^{2\alpha-2m+2|\beta|}(x,y,z)dxdydz < \infty,$$

avec $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ la distance à la droite σ.

Pour $\beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, en notant $\mathfrak{F}_z$ la transformée de Fourier partielle en z on a :

$$\mathfrak{F}_z[D^\beta v](x,y,\xi) = (i\xi)^{\beta_3} D^{(\beta_1,\beta_2)}\mathfrak{F}_z[v](x,y,\xi).$$

Dans ce cas, en appliquant l'égalité de Parseval on obtient

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{V^m_\alpha(Q;\sigma)} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|\beta|\le m}\int\limits_{\mathbb{R}}\left[\int\limits_{\Omega}|\xi|^{2\beta_3}|D^{(\beta_1,\beta_2)}\mathfrak{F}_z[v](x,y,\xi)|^2 r^{2\alpha-2m+2|\beta|}(x,y)dxdy\right]d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta_3=0}^{m}\sum_{|(\beta_1,\beta_2)|\le m-\beta_3}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\beta_3}\\
&\qquad\qquad\int\limits_{\Omega}|D^{(\beta_1,\beta_2)}\mathfrak{F}_z[v](x,y,\xi)|^2 r^{2\alpha-2(m-\beta_3)+2|(\beta_1,\beta_2)|}(x,y)dxdyd\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta_3=0}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\beta_3}\|\mathfrak{F}_z[v]\|^2_{V^{m-\beta_3}_\alpha(\Omega;0)}d\xi,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\|v\|^2_{V^m_\alpha(Q)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta_3=0}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\beta_3}|\mathfrak{F}_z[q]|^2\|u_{i|\xi|}\|^2_{V^{m-\beta_3}_\alpha(\Omega;0)}d\xi. \tag{2.31}$$

A cette étape, on peut appliquer le Théorème 2.1.10 dans le cas $m=1$ et le Théorème 2.1.13 dans le cas $m\geq 2$ (puisque l'argument de $i|\xi|$ est égale à $\frac{\pi}{2}$) pour avoir

$$\sum_{\beta_3=0}^{m}|\xi|^{2\beta_3}\|\mathfrak{F}_z[v]\|^2_{V^{m-\beta_3}_\alpha(\Omega)} \lesssim |\mathfrak{F}[q](\xi)|^2,$$

D'où par (2.31), on obtient

$$\|v\|^2_{V^m_\alpha(Q;\sigma)} \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}}|\mathfrak{F}[q](\xi)|^2 d\xi.$$

Une nouvelle application de l'égalité de Parseval nous permet de conclure que $v\in V^1_\alpha(Q;\sigma)$, et dans le cas $m\geq 2$ et $\partial\Omega\in\mathcal{C}^m$, que $v\in V^m_\alpha(Q;\sigma)$ avec l'estimation

$$\|v\|_{V^m_\alpha(Q;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\mathbb{R}}.$$

Étape 2 : Montrons maintenant que v est solution variationnelle de (2.29)**.**
Soit $\varphi\in\bigcup\limits_{\alpha>0}\mathring{H}^1_{-\alpha}(Q;\sigma)$. D'abord observons que, par l'égalité de Parseval pour la trans-

formée de Fourier partielle en z, et si on note $\nabla_2\psi = (\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y})$, on a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla\varphi}\, dxdydz \\
&\qquad = \int\limits_\Omega \int\limits_\mathbb{R} \Big(\nabla_2 v \cdot \overline{\nabla_2\varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\Big)\, dz\, dxdy \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \int\limits_\mathbb{R} \Big(\nabla_2\mathfrak{F}_z[v] \cdot \overline{\nabla_2\mathfrak{F}_z[\varphi]} + \xi^2\mathfrak{F}_z[v]\overline{\mathfrak{F}_z[\varphi]}\Big)\, d\xi\, dxdy \\
&\qquad = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\mathbb{R} \int\limits_\Omega \mathfrak{F}[q](\xi)\Big(\nabla_2 u_{i|\xi|}(x,y) \cdot \overline{\nabla_2\mathfrak{F}_z[\varphi]} - (i\xi)^2 u_{i|\xi|}(x,y)\overline{\mathfrak{F}_z[\varphi]}\Big)\, dxdy\, d\xi.
\end{aligned}$$

Comme pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, on sait par le Théorème 2.1.10 que $u_{i|\xi|} \in \bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(\Omega; 0)$ et $\mathfrak{F}_z[\varphi](\cdot,\cdot,\xi) \in \bigcup\limits_{\alpha>0} \mathring{H}^1_{-\alpha}(\Omega; 0)$, utilisons que $u_{i|\xi|}$ satisfait (2.20) et l'égalité de Parseval, on déduit que

$$\int_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} \mathfrak{F}[q](\xi)\, \overline{\mathfrak{F}_z[\varphi](0,0,\xi)}\, d\xi = \int_\mathbb{R} q(z)\, \overline{\varphi(0,0,z)}\, dz,$$

i.e. v est solution de (2.29).

Étape 3 : Unicité de la solution.

Supposons que (2.29) admet deux solutions dans $\bigcap\limits_{\alpha>0} \mathring{V}^1_\alpha(Q;\sigma)$, alors leur différence d satisfait

$$\int_Q \nabla d \cdot \overline{\nabla\psi} = 0, \qquad \forall\psi \in \bigcup_{\alpha>0} H^1_{-\alpha}(Q;\sigma). \tag{2.32}$$

Observons que $d \in L^2(Q)$. Considérons alors, comme dans le Théorème 2.1.10, la solution $v \in \mathring{H}^1(Q)$ de

$$\begin{cases} \Delta v = d, & \text{dans} \quad Q, \\ v = 0, & \text{sur} \quad \partial Q, \end{cases}$$

i.e., pour tout $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, v satisfait

$$\int_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla\varphi} = -\int_Q d\,\overline{\varphi}. \tag{2.33}$$

Soit $\Omega_1 \subset \Omega$. Par localisation et en utilisant le théorème de shift standard [10, Théorème 9.25], on sait que $v \in H^2(\Omega_1 \times \mathbb{R})$.
Or par la Remarque 2.2.4, on a

$$H^1_{-\beta}(Q;\sigma) = \bigcap_{j=0}^{1} H^j(\mathbb{R}, H^{1-j}_{-\beta}(\Omega;0)),$$

et donc, le Corollaire 1.1.12 assure que pour $\Omega_1 \subset \Omega$, si $v \in H^2(\Omega_1 \times \mathbb{R})$ alors $v \in$

$\mathring{H}^1_{-\beta}(\Omega \times \mathbb{R}; \sigma)$ pour tout $\beta \in (0,1)$.

Soit $(d_n)_n \subset \mathcal{D}(Q)$ tel que $d_n \to d$ dans $\mathring{H}^1_\alpha(Q;\sigma)$ (l'existence d'une suite est garantie par le Lemme 1.1.11) et donc, aussi dans $L^2(Q)$, alors par (2.33), on a

$$\int_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla d_n} + \int_Q d\,\overline{d}_n = 0.$$

Ainsi, en utilisant (2.32), on déduit que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \overline{\left[\int_Q \nabla v \cdot \overline{\nabla d_n} + \int_Q d\,\overline{d}_n\right]} = \left[\int_Q \overline{\nabla v} \cdot \nabla d + \int_Q \overline{d}\, d\right] = \int_Q |d|^2.$$

i.e. $d = 0$. Ce qui prouve l'unicité de la solution. ■

Remarque 2.2.6. *Le théorème précédent reste vrai si Q est un cylindre tronqué donné par $Q = \Omega \times (0,\pi)$ avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ qui contient l'origine. Dans ce cas, $\sigma := \{(0,0,z) \mid z \in (0,\pi)\}$ est la partie de l'axe des z.*
En effet, il suffit d'effectuer un développement partiel de la série de Fourier dans la base $(sin(k\cdot))_{k\in\mathbb{N}^*}$ au problème (2.28).
Posons $\varphi_k(z) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kz)$ alors en écrivant v dans cette base on a

$$v(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)\varphi_k(z),$$

avec $u_k(x,y) = \int\limits_0^\pi u(x,y,z)\varphi_k(z)dz$. Le problème (2.28) devient donc

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-\Delta_2 u_k + k^2 u_k)\varphi_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k\varphi_k\delta_\sigma & dans \quad Q, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k = 0 & sur \quad \partial Q, \end{cases}$$

avec $q_k(z) = \int\limits_0^\pi q(z)\varphi_k(z)dz$. Or $(\varphi_k(z))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée on obtient donc

$$\begin{cases} -\Delta_2 u_k + k^2 u_k = q_k\delta_0 & dans \quad \Omega, \\ u_k = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

De la même façon qu'avant, en utilisant les résultats du Théorème 2.1.13 (comme dans le Théorème 2.2.1 avec $\xi = k,\ k \in \mathbb{N}^*$), on déduit la régularité de v dans $V^m_\alpha(Q;\sigma)$.

2.2.2 L'équation de la chaleur avec un second membre Dirac

Considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \Omega$. Dans cette sous-section, on étudie le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,y) - \Delta u(t,x,y) = g(t)\, \delta_{\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}}, & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ u(t,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}_0^+)$.

Un tel problème apparaît dans le contrôle optimal des problèmes paraboliques avec contrôle ponctuel, voir par exemple [29]. Selon ce papier, des résultats de la régularité d'un tel problème sont d'un grand intérêt pour la convergence du taux de contrôle discret au contrôle continu, voir [29, Proposition 2.2].

Dans [29], les auteurs prouvent que, pour tout $g \in L^2(0,T)$, le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,y) - \Delta u(t,x,y) = g(t)\, \delta_{\mathbb{R}_0^+ \times \{0\}}, & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega, \end{cases} \tag{2.34}$$

a une unique solution dans le sens qu'il existe une unique fonction $u \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ telle que, pour tout $\varphi \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega u(t,x,y)\varphi(t,x,y)\, dxdy\, dt = \int_0^T g(t) w(t,0)\, dt,$$

où $w \in L^2(0,T,H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \cap H^1(0,T,L^2(\Omega))$ est la solution faible du problème adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t w(t,x,y) - \Delta w(t,x,y) = \varphi(t,x,y), & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,T) \times \Omega, \\ w(t,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (t,x,y) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ w(T,x,y) = 0, & \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega. \end{cases} \tag{2.35}$$

Nous avons ici amélioré de manière significative les résultats de [29] en prouvant le résultat suivant.

Théorème 2.2.7. *Soient $m \geq 2$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ avec $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^m$ et tel que $0 \in \Omega$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_0^+)$. Alors il existe une fonction $u \in \bigcap\limits_{\alpha > m-1} X_\alpha^m$ où*

$$X_\alpha^m := \bigcap_{l=0}^m \tilde{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}_0^+, \mathring{V}_\alpha^{m-l}(\Omega; 0)),$$

et telle que $u|_{[0,T]}$ est la solution de (2.34). De plus, pour tout $\alpha > m-1$, u satisfait *l'estimation*

$$\|u\|_{X_\alpha^m} = \sum_{l=0}^{m} \|u\|_{\tilde{H}^{\frac{l}{2}}(\mathbb{R}_0^+, \mathring{V}_\alpha^{m-l}(\Omega;0))} \lesssim \|g\|_{0,\mathbb{R}^+}. \tag{2.36}$$

Preuve : Pour chaque $p \in \mathbb{C}^+$, on fixe l'unique $k = k(p) \in \mathbb{C}$ avec $\Im k > 0$ tel que $k^2 = -p$. Posons $v(p, x, y) = -\mathfrak{L}[g](p)\, u_k(x, y)$ où u_k est l'unique solution de (2.16) donnée par le Théorème 2.1.10 et $\mathfrak{L}$ dénote la transformée de Laplace.
On définit ainsi $u(t, x, y) = \mathfrak{L}^{-1}[v](t, x, y)$, où $\mathfrak{L}$ dénote la transformée de Laplace partielle en t.

Par le Théorème 1.2.4, $u \in X_\alpha^m$ si et seulement si pour tout $l = 0, \ldots, m$, on a

$$(1 + \cdot)^{\frac{l}{2}} \mathfrak{L}[u] \in \mathcal{H}^2\Big(\mathbb{C}^+, \mathring{V}_\alpha^{m-l}(\Omega; 0)\Big),$$

avec

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_\alpha^m}^2 &\lesssim \sup_{\Re p > 0} \sum_{l=0}^{m} \|(1 + \cdot)^{\frac{l}{2}} \mathfrak{L}[u]\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbb{C}^+, \mathring{V}_\alpha^{m-l}(\Omega;0))} \\ &\lesssim \sup_{\Re p > 0} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=0}^{m} (1 + |p|)^l \|\mathfrak{L}[u](p, \cdot)\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} d\Im p. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Et grâce au Théorème 2.1.13 (avec $k^2 = -p$), on a

$$\sum_{l=0}^{m} (1 + |p|)^l \|\mathfrak{L}[u](p, \cdot)\|^2_{V_\alpha^{m-l}(\Omega;0)} \lesssim |\mathfrak{L}[g](p)|^2,$$

pour tout $p \in \mathbb{C}^+$ et tout $\alpha > m - 1$. Alors par (2.37) et en appliquant le Théorème 1.2.4 encore une fois, on conclut que $u \in \bigcap\limits_{\alpha > m-1} X_\alpha^m$ avec

$$\|u\|_{X_\alpha^m}^2 \lesssim \sup_{\Re p > 0} \int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{L}[g](p)|^2 d\Im p \lesssim \|g\|_{0,\mathbb{R}^+}^2.$$

Il reste à prouver que $u|_{[0,T]}$ est la solution de (2.34). Soient $\varphi \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ et $w \in L^2(0, T, H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, L^2(\Omega))$ la solution correspondante de (2.35). Comme w est la solution de (2.35) et comme, pour presque tout $t \in \mathbb{R}_0^+$ et tout $\beta \in (m - 1, m)$, on sait que $u(t, \cdot) \in \mathring{V}_\beta^m(\Omega; 0) \subset \mathring{V}_{\beta-m+1}^1(\Omega; 0)$, on déduit par le Corollaire 1.1.13 que

$$\int_0^T \int_\Omega u\, \varphi = -\int_0^T \int_\Omega u\, (\partial_t w + \Delta w) = \int_\Omega \int_0^T (-u\, \partial_t w + \nabla u \cdot \nabla w).$$

Notons par $\tilde{w}$ l'extension de w par zéro en dehors de $(0, T)$. En utilisant la Proposition 1.2.5 et le fait que

$$\mathfrak{L}[\partial_t w](q) = q \mathfrak{L}[w](q) - w(0),$$

(voir [21, p. L8]), on déduit que pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\Big[-\mathfrak{L}[u](p,x,y)(\overline{-\overline{p}\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)}) + \mathfrak{L}[u](p,x,y)\,\overline{\tilde{w}(0,x,y)}\Big]\,d\Im p\,dxdy\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\nabla\mathfrak{L}[u](p,x,y)\cdot\overline{\nabla\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)}\,d\Im p\,dxdy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[g](p)\int_\Omega\Big[k^2u_k(x,y)\overline{\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)} - \nabla u_k(x,y)\cdot\overline{\nabla\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)}\Big]dxdyd\Im p\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[u](p,x,y)\,d\Im p\,\overline{\tilde{w}(0,x,y)}\,dxdy.\end{aligned}$$

Par la Proposition 1.2.7, pour presque tout $(x,y)\in\Omega$, on a $\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[u](p,x,y)\,d\Im p = 0$. Ce qui implique que

$$\int_0^T\int_\Omega u\,\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[g](p)\int_\Omega\Big[k^2u_k(x,y)\overline{\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)} - \nabla u_k(x,y)\cdot\overline{\nabla\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},x,y)}\Big]dxdyd\Im p.$$

Comme pour presque tout $p\in\mathbb{C}^+$, on a $\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},\cdot)\in H^2(\Omega)\cap\mathring{H}^1(\Omega)$, par le Corollaire 1.1.12 on obtient $\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},\cdot)\in\mathring{H}^1_{-\beta}(\Omega;0)$ pour $\beta\in(0,1)$, et comme u_k est solution de (2.20), on obtient, en utilisant encore une fois la Proposition 1.2.5,

$$\int_0^T\int_\Omega u\,\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{L}[g](p)\overline{\mathfrak{L}[\tilde{w}](-\overline{p},0)}\,d\Im p = \int_{\mathbb{R}^+} g(t)\overline{\tilde{w}(t,0)}\,dt = \int_0^T g(t)w(t,0)\,dt,$$

ce qui prouve que $u|_{[0,T]}$ est la solution de (2.34). ∎

Chapitre 3

Problèmes elliptiques avec une fracture semi-infinie ou un segment

Sommaire

Dans ce chapitre, on étudie de nouveau l'équation de Laplace avec une masse de Dirac dans le second membre, mais cette fois sur $\mathbb{R}^3$ tout entier et avec une fracture semi-infinie, notamment pour $q \in L^2_\epsilon(0,\infty)$, $h \in V^0_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3; 0)$ on s'intéresse au problème

$$-\Delta u = q\delta_\sigma + h, \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

avec σ une demi-droite de $\mathbb{R}^3$. Après transformation de Mellin, l'étude de ce dernier revient à étudier de nouveau le problème de Helmholtz avec un second membre Dirac mais cette fois sur la sphère unité S^2.

Un argument de localisation permet d'utiliser les résultats de l'étude du problème (3.1) et de résoudre l'équation de Laplace avec une fracture finie dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$.

3.1 Le problème de Helmholtz sur la sphère unité

Considérons la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$ et ses représentations en coordonnées polaires $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1}, \phi_3^{-1}$ données à la sous-section 1.1.4. Soit B le point d'intersection de la demi droite $\{(x,0,0) \mid x > 0\}$ (le demi axe des x positifs) et de la sphère unité S^2.
Dans cette section, on considère le problème

$$\mathcal{L}(\Theta, \lambda, \partial_\Theta) v_\lambda = \delta_B, \quad \text{dans} \quad S^2, \tag{3.2}$$

où $\mathcal{L}$ est défini par

$$\mathcal{L}(\Theta, \lambda, \partial_\Theta) = L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda,$$

avec L_{S^2} l'opérateur de Laplace Beltrami défini sur la sphère S^2 et λ un paramètre complexe dans $R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$ pour un certain $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ fixé. Rappelons que

$$R[-\frac{1}{2} - \epsilon] = \{-\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi \mid \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons que le point B est couvert par la représentation correspondante au coordonnées sphériques standard ϕ_1^{-1}, i.e.

$$\phi_1^{-1}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

et correspond dans cette carte à $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$. De plus, dans cette carte, L_{S^2} prend la forme

$$L_{S_2} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Ainsi cet opérateur gelé en B n'est rien d'autre que l'opérateur de Laplace.

Dans toute la section, pour tout $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$, on fixe $k \in \mathbb{C}$ avec $\Im k > 0$ tel que $k^2 = \lambda^2 + \lambda$. Observons que, comme $\Re(\lambda^2 + \lambda) < 0$, on obtient $\arg k \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

3.1.1 Estimations a priori dans des bandes infinies

En utilisant la même procédure que dans le Chapitre 2, on doit d'abord résoudre le problème

$$\mathcal{L}(\Theta, \lambda, \partial_\Theta) W_{\lambda,h} = h, \quad \text{dans } S^2, \tag{3.3}$$

avec un second membre $h \in V_\alpha^{m-2}(S^2; B)$ pour $m \geq 2$ et $\alpha > m - 1$ (indépendant de λ).

Pour obtenir une estimation a priori de la solution de (3.3) uniforme en λ, on utilise l'argument de l'ajout d'une variable comme dans [17]. Cela signifie qu'on résolve un problème similaire à (3.3) avec k^2 remplacé par dérivée seconde dans une variable supplémentaire.

Lemme 3.1.1. *Soient $m \geq 2$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière de classe $\mathcal{C}^m$ et*

$Q := \Omega\times\mathbb{R}$. *Considérons un opérateur elliptique*[1] *homogène d'ordre 2 avec des coefficients constants* L_0 *dans* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $u \in \mathring{H}^1(Q)$ *tel que* $(L_0+\partial_{n+1}^2)u \in H^{m-2}(Q)$. *Alors* $u \in H^m(Q)$ *et satisfait*

$$\|u\|_{m,Q} \lesssim \|(L_0 + \partial_{n+1}^2)u\|_{m-2,Q}, \tag{3.4}$$

la constante dépend seulement de la constante d'ellipticité γ.

Preuve : Comme il existe une transformation affine F de $\mathbb{R}^n$ dans lui même telle que

$$L_0u(x) = \Delta v(y),$$

avec $y = Fx$ et $v(y) = u(F^{-1}y)$(voir [23, p. 266]), il suffit de montrer le résultat pour $L_0 = \Delta$.

D'abord, notons que u est la solution du problème variationnel

$$\forall v \in \mathring{H}^1(Q), \quad \int_Q \nabla u\cdot\nabla v = -\int_Q \Delta u\; v. \tag{3.5}$$

Or comme Q est borné dans une direction (Voir [10, Remarque 21, p. 290]), on a l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in H^1(Q)$

$$|u|_{1,Q} = \|\nabla u\|_{0,Q} \geq \alpha\|u\|_{1,Q}. \tag{3.6}$$

En associant (3.5) (avec $v = u$) et (3.6), on obtient

$$\alpha^2\|u\|_{1,Q}^2 \leq \|\Delta u\|_{0,Q}\|u\|_{0,Q},$$

i.e.

$$\|u\|_{1,Q} \lesssim \|\Delta u\|_{0,Q}. \tag{3.7}$$

Maintenant pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en appliquant la Proposition 1.0.5 à $U_1 = \Omega\times]n, n+1[$ et $U_2 = \tilde{\Omega}\times]n-1, n+2[$, où $\tilde{\Omega}$ est tel que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, on obtient $u \in H^m(\Omega\times]n, n+1[)$ et

$$\|u\|_{m,\Omega\times]n,n+1[} \lesssim \|\Delta u\|_{m-2,\Omega\times]n-1,n+2[} + \|u\|_{1,\Omega\times]n-1,n+2[},$$

avec une constante indépendante de n (comme le problème est invariant par translation en z). En prenant la somme sur n, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u\|_{m,\Omega\times]n,n+1[}^2 \lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\|\Delta u\|_{m-2,\Omega\times]n-1,n+2[}^2 + \|u\|_{1,\Omega\times]n-1,n+2[}^2\right),$$

1. par elliptique on veut dire que $L_0(i\xi) \leq -\gamma|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, pour certaines $\gamma > 0$

et on déduit que $u \in H^m(Q)$ avec

$$\|u\|_{m,Q}^2 \lesssim \|\Delta u\|_{m-2,Q}^2 + \|u\|_{1,Q}^2. \tag{3.8}$$

En reportant (3.7) dans (3.8) on obtient l'estimation

$$\|u\|_{m,Q} \lesssim \|\Delta u\|_{m-2,Q}.$$

■

Théorème 3.1.2. *Soient $m \geq 2$ et α un nombre réel positif tel que $\alpha > m-1$. Soit L_{S^2} l'opérateur de Laplace Beltrami défini sur la sphère unité S^2 et soit B le point d'intersection de la sphère unité avec le demi-axe des x positifs.*
Pour $u \in V_\alpha^m(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$, on a l'estimation

$$\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})u\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}. \tag{3.9}$$

Preuve : Par facilité, notons par $L := L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ l'opérateur à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ et soit $L_0 := L_{S^2}(B) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ l'opérateur L gelé en B. Rappelons que au voisinage de B on peut prendre une carte locale correspondante aux coordonnées sphériques standards, et on peut supposer donc que $L_0 = \Delta_3$.

Étape 1 : Existence de $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$ et pour toute fonction de troncature η_0 avec un support inclus dans $\bar{B}(B, 2\delta)$, on a

$$\|\eta_0 u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|L(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|\eta_0 u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}, \tag{3.10}$$

où la constante peut être choisie indépendante de $\delta \in (0, \delta_0]$.

Comme $u \in V_\alpha^m(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$, les hypothèses de [32, Théorème 2.2.9] sont satisfaites pour l'opérateur L_0, on obtient donc

$$\|\eta_0 u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|L_0(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|\eta_0 u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})},$$

ou encore,

$$\begin{aligned}\|\eta_0 u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|L(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &+ \|(L-L_0)(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &+ \|\eta_0 u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Donc il reste à estimer $\|(L-L_0)(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}$. Notons qu'on a

$$L - L_0 = L_{S^2} - \Delta_2 = \sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta D^\beta,$$

avec Δ_2 désigne le laplacien en dimension 2. Par la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
&\|(L-L_0)(\eta_0 u)\|^2_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}\\
&\qquad= \sum_{|\gamma|\le m-2}\int_{S^2\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\Big|D^\gamma\Big(\sum_{|\beta|\le 2} a_\beta D^\beta(\eta_0 u)\Big)\Big|^2 dzd\Theta\\
&\qquad\lesssim \sum_{|\gamma|\le m-2}\sum_{|\beta|\le 2}\int_{S^2\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\sum_{l\le\gamma}\Big|D^{\gamma-l}a_\beta D^{l+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta.
\end{aligned}$$

Comme $D^{\gamma-l}a_\beta=0$ si $\gamma_3-l_3>0$, on a $\|(L-L_0)(\eta_0 u)\|^2_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}\lesssim S_1+S_2$, où

$$S_1 := \sum_{|\gamma|\le m-2}\sum_{|\beta|\le 2}\int_{S^2\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\Big|a_\beta(\Theta)D^{\gamma+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta.$$

$$S_2 := \sum_{|\gamma|\le m-2}\sum_{|\beta|\le 2}\int_{S^2\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\sum_{l<\gamma,l_3=\gamma_3}\Big|D^{\gamma-l}a_\beta(\Theta)D^{l+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta.$$

Remarquons que a_β satisfait

$$|a_\beta(\Theta)|\le c\delta \quad \text{si } \Theta\in B(B,2\delta),$$

avec c dépend de δ_0 mais pas de δ, et rappelons que $supp(\eta_0)\subset\overline{B}(B,2\delta)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
S_1 &\lesssim \delta^2\sum_{|\gamma|\le m-2}\sum_{|\beta|\le 2}\int_{B(B,2\delta)\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\Big|D^{\gamma+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta\\
&\lesssim \delta^2\sum_{|\gamma|+|\beta|\le m}\int_{B(B,2\delta)\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+|\gamma|+|\beta|)}\Big|D^{\gamma+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta\\
&\lesssim \delta^2\|\eta_0 u\|^2_{V_\alpha^m(B(B,2\delta)\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pour S_2, comme a_β sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on déduit que, pour tout $|\gamma|\le m$,

$$|D^\gamma a_\beta(\Theta)|\le c_m,\quad \forall\Theta\in B(B,2\delta),$$

où c_m est une constante positive qui dépend seulement de m. Par conséquent, pour $|l|<|\gamma|$ on a

$$\begin{aligned}
S_2 &\lesssim \sum_{|\gamma|\le m-2}\sum_{|\beta|\le 2}\int_{S^2\times\mathbb{R}} r^{2(\alpha-m+2+|\gamma|)}\sum_{|l|<|\gamma|,l_3=\gamma_3}\Big|D^{l+\beta}(\eta_0 u)\Big|^2 dzd\Theta\\
&\lesssim \delta^2\|\eta_0 u\|^2_{V_\alpha^{m-1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}\\
&\lesssim \delta^2\|\eta_0 u\|^2_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Ces deux estimations montrent que

$$\|(L-L_0)(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \delta\|\eta_0 u\|_{V_\alpha^{m}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}.$$

En reportant dans (3.11), on en déduit (3.10) pour $0<\delta<\delta_0$ avec δ_0 suffisamment petit.

Étape 2 : Existence de $\delta_1 \in (0,\delta_0]$ tel que pour tout $\delta \in (0,\delta_1]$, tout $\Theta_0 \in S^2\backslash B(B,2\delta_0)$ et toute fonction de troncature η_{Θ_0} avec un support inclus dans $\bar{B}(\Theta_0,2\delta)$, on a

$$\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}} \lesssim \|L(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} + \frac{1}{\delta^{m-2}}\|\eta_{\Theta_0}u\|_{1,S^2\times\mathbb{R}}, \tag{3.12}$$

où la constante positive c peut être choisie indépendamment de $\delta\in(0,\delta_1]$ et de Θ_0.

En effet, fixons un point quelconque $\Theta_0\in S^2\backslash B(B,\delta_0)$ et posons L_{Θ_0} la partie principale de L gelée en Θ_0, alors comme $\eta_{\Theta_0}u$ appartient à $H^m(B(\Theta_0,2\delta)\times\mathbb{R})$, par le Lemme 3.1.1, on a

$$\begin{aligned}\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}} &\leq c_1\|L_{\Theta_0}(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}}\\ &\leq c_1(\|L(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} + \|(L-L_{\Theta_0})(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}}),\end{aligned} \tag{3.13}$$

où la constante positive c_1 peut être choisie indépendamment de Θ_0 (car L_{S^2} est uniformément elliptique).
Comme dans la première étape, en écrivant $L-L_{\Theta_0}=\sum\limits_{|\beta|\leq 2} b_\beta D^\beta$ et en utilisant le fait que $|b_\beta(\Theta)|\leq c_2\delta$ pour tout $\Theta\in\bar{B}(\Theta_0,2\delta)$ et tout $|\beta|=2$, on montre que

$$\|(L-L_{\Theta_0})(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} \leq c_3\delta\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}} + c_3\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m-1,S^2\times\mathbb{R}},$$

pour certaines $c_3>0$ qui peuvent être choisies indépendamment de Θ_0.
Or par l'inégalité d'interpolation (Théorème 1.0.1), on a

$$\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m-1,S^2\times\mathbb{R}} \leq \delta\|\eta_{\Theta_0}u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}} + \frac{K}{\delta^{m-2}}\|\eta_{\Theta_0}u\|_{1,S^2\times\mathbb{R}},$$

pour certain $K>0$ (indépendant de Θ_0). Alors

$$\|(L-L_{\Theta_0})(\eta_{\Theta_0}u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} \leq 2c_3\delta\|\eta_{X_0}u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}} + \frac{c_3K}{\delta^{m-2}}\|\eta_{\Theta_0}u\|_{1,S^2\times\mathbb{R}}.$$

Donc en reportant dans (3.13), on a (3.12) pour δ suffisamment petit.

Étape 3 : Conclusion. Fixons un $\delta\in(0,\delta_1]$ et considérons le recouvrement ouvert $\bigcup\limits_{\Theta\in S^2\backslash B(B,2\delta_0)} B(\Theta,2\delta)$ de $S^2\backslash B(B,2\delta_0)$. Par compacité de $S^2\backslash B(B,2\delta_0)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup\limits_{j=1}^{J} B(\Theta_j, 2\delta)$ de $S^2 \backslash B(B, 2\delta)$. Donc

$$\bigcup_{j=1}^{J} B(\Theta_j, 2\delta) \cup B(B, 2\delta_0),$$

est un recouvrement fini de S^2. Par la partition de l'unité correspondante $(\eta_j)_{j=0,\ldots,J}$ de S^2, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &= \|\sum_{j=0}^{J}(\eta_j u)\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \sum_{j=0}^{J}\|\eta_j u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &\lesssim \|\eta_0 u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{J}\|\eta_j u\|_{m,S^2\times\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Utilisons (3.10) et (3.12), on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &\lesssim \|L(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|\eta_0 u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J}\|L(\eta_j u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} + \sum_{j=1}^{J}\|\eta_j u\|_{1,S^2\times\mathbb{R}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Par la formule de Leibniz on a pour tout $j = 0, \ldots, J$,

$$L(\eta_j u) = \eta_j L u + \sum_{|\beta|\leq 2} c_\beta(\Theta) \sum_{\gamma<\beta} D^{\beta-\gamma}(\eta_j) D^\gamma u.$$

Par conséquent, comme η_0 est constante sur un voisinage V de B, on déduit que

$$\|L(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|Lu\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|u\|_{m-1,(S^2\backslash V)\times\mathbb{R}},$$

et de même pour $j = 1, \ldots, J$,

$$\begin{aligned} \|L(\eta_j u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} &\lesssim \|Lu\|_{m-2,B(\Theta_j,2\delta))\times\mathbb{R}} + \|u\|_{m-1,B(\Theta_j,2\delta)\times\mathbb{R}} \\ &\lesssim \|Lu\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|u\|_{m-1,(S^2\backslash V)\times\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Une autre application de l'inégalité d'interpolation donne

$$\begin{aligned} \|u\|_{m-1,(S^2\backslash V)\times\mathbb{R}} &\leq \epsilon\|u\|_{m,(S^2\backslash V)\times\mathbb{R}} + \frac{1}{\epsilon^{m-2}}\|u\|_{1,(S^2\backslash V)\times\mathbb{R}} \\ &\lesssim \epsilon\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \frac{1}{\epsilon^{m-2}}\|u\|_{V_{\alpha-m+1}^1(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Cette estimation dans les deux précédentes permet de conclure que

$$\begin{aligned}\|L(\eta_0 u)\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R});B\times\mathbb{R}} \quad &\lesssim \quad \|Lu\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \epsilon\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &\qquad + \frac{1}{\epsilon^{m-2}}\|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{3.15}$$

et pour $j \in \{1,\ldots,J\}$,

$$\begin{aligned}\|L(\eta_j u)\|_{m-2,S^2\times\mathbb{R}} \quad &\lesssim \quad \|Lu\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \epsilon\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &\qquad + \frac{1}{\epsilon^{m-2}}\|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{3.16}$$

pour tout $\epsilon > 0$. De plus, par les mêmes arguments que ceux du Lemme 1.1.3, on a

$$\|\eta_0 u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}, \tag{3.17}$$

alors que la formule de Leibniz donne

$$\|\eta_j u\|_{1,S^2\times\mathbb{R}} \lesssim \|u\|_{1,(S^2\setminus V)\times\mathbb{R}} \lesssim \|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}. \tag{3.18}$$

En utilisant les estimations (3.15) à (3.18) dans (3.14), on conclut que

$$\begin{aligned}\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \quad &\lesssim \quad \|Lu\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \epsilon\|u\|_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &\qquad + (1+\frac{1}{\epsilon^{m-2}})\|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})},\end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Choisissons ϵ suffisamment petit on déduit (3.9).

■

3.1.2 Problème de Helmholtz sur la sphère unité avec un second membre régulier

Dans cette sous-section, on donne l'équivalent du Théorème 2.1.1 dans les espaces de Sobolev avec poids pour la solution de (3.3). Dans ce cas, on a besoin de restreindre $h \in V_\alpha^{m-2}(S^2;B) \cap L^2(S^2)$ et on va prouver une inégalité légèrement différente

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l}\|W_{\lambda,h}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda|^{2l}\|h\|^2_{V_\alpha^{m-2-l}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}.$$

Cette dernière doit être comparer avec [31, Estimation (6)] mais ici le terme de plus $\|h\|_{0,S^2}$ dans le second membre évite l'utilisation de toute condition sur α, sauf celle d'être plus grand que $m-1$.

Lemme 3.1.3. *Soit $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$ avec $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ et $h \in L^2(S^2)$. Alors le problème* (3.3) *admet une unique solution variationnelle non nulle $W_{\lambda,h} \in H^1(S^2)$. De plus, on a*

$$\|W_{\lambda,h}\|_{1,S^2,|\lambda|} \lesssim \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.19}$$

Preuve : Par facilité, dans la preuve on écrit w au lieu de $W_{\lambda,h}$.

Première partie : Existence et unicité.
Par [11, Section 16.1.a, p. 626], on sait que la formulation variationnelle de (3.3) est

$$\int_{S^2} \Big[\nabla_T w \cdot \overline{\nabla_T v} - (\lambda^2 + \lambda) w\, \overline{v}\Big] d\Theta = -\int_{S^2} h\, \overline{v}\, d\Theta, \qquad \forall v \in H^1(S^2), \tag{3.20}$$

où on rappelle que $\nabla_T w$ est la composante tangentielle du gradient i.e., $\nabla = \frac{1}{\rho}\nabla_T + \Theta\partial_\rho$, avec $\Theta = \frac{x}{|x|}$.
Considérons la forme sesquilinéaire continue sur $H^1(S^2)$ définie par

$$a_\lambda(w, v) = \int_{S^2} \Big[\nabla_T w . \overline{\nabla_T v} - (\lambda^2 + \lambda) w\, \overline{v}\Big] d\Theta.$$

Montrons l'existence de $\alpha > 0$ indépendante de λ telle que

$$\forall w \in H^1(S^2), \quad \Re a_\lambda(w, w) \geq \alpha \|w\|^2_{1,S^2}.$$

En effet, pour un $w \in H^1(S^2)$ fixé, on a

$$\Re a_\lambda(w, w) = |w|^2_{1,S^2} + \Re\Big(- (\lambda^2 + \lambda)\Big)\|w\|^2_{0,S^2}.$$

Comme $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$ avec $\xi \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
\Re\Big(- (\lambda^2 + \lambda)\Big) &= -\Big((\frac{1}{2} + \epsilon)^2 - \xi^2 - (\frac{1}{2} + \epsilon)\Big) \\
&= \xi^2 + \frac{1}{4} - \epsilon^2 \geq \frac{1}{4} - \epsilon^2 =: \alpha > 0.
\end{aligned}$$

En appliquant le Lemme de Lax-Milgram généralisé (voir pour l'instant [43, Lemme 8.2]), on déduit que (3.3) a une unique solution $w \in H^1(S^2)$.

Deuxième partie : Estimation.
D'une part, en prenant la partie réelle de (3.20) avec $v = w$, on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Re\bigg(\int_{S^2} \Big[|\nabla_T w|^2 - (\lambda^2 + \lambda)|w|^2\Big]\bigg) = \Re\Big(- \int_{S^2} h\, \overline{w}\Big) \leq \Big|\int_{S^2} h\, \overline{w}\Big| \lesssim \|h\|_{0,S^2}\|w\|_{0,S^2}.$$

D'autre part, comme $\Re\Big(-(\lambda^2+\lambda)\Big) \geq \alpha$, on déduit que

$$\|w\|_{1,S^2}^2 \lesssim \int_{S^2} |\nabla_T w|^2 + \Re\Big(-(\lambda^2+\lambda)\Big) \int_{S^2} |w|^2,$$

et alors

$$\|w\|_{1,S^2}^2 \lesssim \|h\|_{0,S^2}\|w\|_{0,S^2} \lesssim \|h\|_{0,S^2}\|w\|_{1,S^2}.$$

Ce qui prouve que

$$\|w\|_{1,S^2} \lesssim \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.21}$$

Passons maintenant à l'estimation (3.19). On distingue deux cas.

Cas 1 : Pour $|\xi| \leq 1$. Par la Définition 1.0.3, en utilisant (3.21), on déduit directement que

$$\|w\|_{1,S^2,|\lambda|}^2 = \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l}\|w\|_{1-l,S^2}^2 \lesssim \|w\|_{1,S^2}^2 \lesssim \|h\|_{0,S^2}^2.$$

Cas 2 : Pour $|\xi| \geq 1$. La preuve de (3.19) se réduit à (3.21) ainsi que

$$|k|\|w\|_{0,S^2} \lesssim \|h\|_{0,S^2},$$

puisque $|k| \sim |\lambda| \sim |\xi|$ (rappelons que $k \in \mathbb{C}$ satisfait $\Im k > 0$ et $k^2 = \lambda^2 + \lambda$ avec $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$).

Pour prouver cette dernière estimation, on choisit encore une fois $v = w$ dans (3.20), et on obtient

$$|k|^2\|w\|_{0,S^2}^2 = \Big|\int_{S^2} |\nabla_T w|^2 - \int_{S^2} hw\Big| \leq |w|_{1,S^2}^2 + \|h\|_{0,S^2}\|w\|_{0,S^2}.$$

Par conséquent, grâce à (3.21), on trouve

$$|k|^2\|w\|_{0,S^2}^2 \lesssim \|h\|_{0,S^2}^2, \tag{3.22}$$

et alors, encore par (3.21) et (3.22), on conclut que

$$\|w\|_{1,S^2,|k|} = \|w\|_{1,S^2}^2 + |k|^2\|w\|_{0,S^2}^2 \lesssim \|h\|_{0,S^2}^2.$$

■

Lemme 3.1.4. *Soient $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$ avec $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $m \geq 2$ et $\alpha > m-1$. Soit $h \in V_\alpha^{m-2}(S^2; B) \cap L^2(S^2)$ avec B le point d'intersection de la sphère unité avec le demi-axe des x positifs. Alors la solution $W_{\lambda,h} \in H^1(S^2)$ du problème (3.3) appartient à $V_\alpha^m(S^2; B)$ avec l'estimation*

$$\|W_{\lambda,h}\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \leq p_m(|\lambda|)\Big(\|h\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Big), \tag{3.23}$$

où $p_m(|\lambda|)$ est un polynôme de degré m en $|\lambda|$.

Preuve : Comme avant, par facilité dans la preuve on écrit w au lieu de $W_{\lambda,h}$.
Comme l'opérateur $L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda$ est un opérateur elliptique sur S^2 et $h \in L^2(S^2)$, sa solution faible est dans $H^2(S^2)$ (voir [20, Théorème 52.1]).

D'abord remarquons que le Lemme 3.1.3 et la Proposition 1.1.15 impliquent que pour tout $\alpha_1 > 0$, $w \in V^1_{\alpha_1}(S^2; B)$ avec

$$\|w\|_{V^1_{\alpha_1}(S^2;B)} \lesssim \|w\|_{1,S^2} \lesssim \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.24}$$

Pour $m \geq 2$, montrer que $w \in V^m_\alpha(S^2; B)$ revient à montrer que

$$w \in V^m_\alpha(B_1; B) \cap H^m(B_2) \cap H^m(B_3),$$

où les B_i sont les parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ définies dans la sous-section 1.1.4.
Soit $i \in \{1, 2, 3\}$ et soit $\tilde{B}_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{B}_i \subset \tilde{B}_i$. Soit $\eta_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$, une fonction de troncature, telle que

$$\begin{cases} \eta_i = 1 & \text{sur } B_i, \\ \eta_i = 0 & \text{sur } \tilde{B}_i^{\,c}, \end{cases}$$

où pour $i \in \{1, 2, 3\}$, Ω_i est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^m$ tel que $\overline{\tilde{B}_i} \subset \Omega_i$.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, posons $v_i := w \circ \phi_i^{-1}$et $u_{\xi,i} := \eta_i\ v_i$. Donc pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $u_{\xi,i} \in V^1_{\alpha_1}(\Omega_i; B)$, ou encore $u_{\xi,1} \in V^1_{\alpha_1}(\Omega_1; B)$ avec

$$\|u_{\xi,1}\|_{V^1_{\alpha_1}(\Omega_1;B)} \lesssim \|h\|_{0,S^2},$$

et pour $i = 2, 3$, $u_{\xi,i} \in H^1(\Omega_i)$ avec

$$\|u_{\xi,i}\|_{1,\Omega_i} \lesssim \|h\|_{0,S^2}.$$

Remarquons que $u_{\xi,i}$ est la solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)u_{\xi,i} = \eta_i h + v_i L_{S^2}\eta_i + 2\nabla_T \eta_i \cdot \nabla_T v_i, \qquad \text{dans } \Omega_i.$$

Donc pour $i = 1, 2, 3$, on peut considérer $u_{\xi,i}$ comme solution de

$$L_{S^2} u_{\xi,i} = \eta_i h + v_i L_{S^2}\eta_i + 2\nabla_T \eta_i \cdot \nabla_T v_i - (\lambda^2 + \lambda)u_{\xi,i} =: \tilde{h}_i, \qquad \text{dans } \Omega_i.$$

Grâce au Lemme 3.1.3, pour $\alpha_2 > 1$ on a $\tilde{h}_1 \in V^0_{\alpha_2}(\Omega_1; B)$ avec

$$\begin{aligned}
\|\tilde{h}_1\|_{V^0_{\alpha_2}(\Omega_1;B)} &\lesssim \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(\tilde{B_1};B)} + \|v_1\|_{V^0_{\alpha_2}(\tilde{B_1};B)} + \|\nabla_T v_1\|_{V^0_{\alpha_2}(\tilde{B_1};B)} + (|\lambda|^2 + |\lambda|)\|u_{\xi,1}\|_{V^0_{\alpha_2}(\tilde{B_1};B)} \\
&\lesssim \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + \|w\|_{1,S^2} + (|\lambda|^2 + |\lambda|)\|h\|_{0,S^2} \\
&\lesssim \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + p_2(|\lambda|)\|h\|_{0,S^2},
\end{aligned}$$

où $p_2(|\lambda|) = 1 + |\lambda|^2 + |\lambda|$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à 2 en $|\lambda|$.

En appliquant le Théorème 1.1.5 , on obtient $u_{\xi,1} \in V^2_{\alpha_2}(\Omega_1; B)$ avec l'estimation :

$$\|u_{\xi,1}\|_{V^2_{\alpha_2}(\Omega_1;B)} \lesssim p_2(|\lambda|)\bigg(\|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\bigg). \tag{3.25}$$

De même pour $i = 2, 3$, comme $\tilde{h}_i \in L^2(\Omega_i)$ et satisfait grâce au Lemme 3.1.3,

$$\|\tilde{h}_i\|_{0,\Omega_i} \lesssim p_2(|\lambda|)\|h\|_{0,S^2},$$

où $p_2(|\lambda|)$ est toujours un polynôme de degré inférieur ou égale à 2 en $|\lambda|$, on trouve directement, par le Théorème 60 de [28], que $u_{\xi,i} \in H^2(\Omega_i)$ pour $i = 2, 3$ avec l'estimation

$$\|u_{\xi,i}\|_{2,\Omega_i} \lesssim p_2(|\lambda|)\|h\|_{0,S^2}. \tag{3.26}$$

On en déduit par (3.25) et (3.26) que $w \in V^2_{\alpha_2}(S^2; B)$ avec

$$\|w\|_{V^2_{\alpha_2}(S^2;B)} \lesssim p_2(|\lambda|)\bigg(\|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\bigg). \tag{3.27}$$

Donc par itération sur ℓ, on prouve que

$$\|w\|_{V^\ell_{\alpha_\ell}(S^2;B)} \lesssim p_\ell(|\lambda|)\bigg(\|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\bigg), \tag{3.28}$$

avec $p_\ell(|\lambda|)$ un polynôme de degré inférieur ou égale à ℓ en $|\lambda|$. Ou encore, on montre que pour $\alpha_\ell > \ell - 1$, on a $u_{\xi,1} \in V^\ell_{\alpha_\ell}(\Omega_1; B)$ avec

$$\|u_{\xi,1}\|_{V^\ell_{\alpha_\ell}(\Omega_1;B)} \lesssim p_\ell(|\lambda|)\bigg(\|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\bigg), \tag{3.29}$$

et pour $i = 2, 3$, on a $u_{\xi,i} \in H^\ell(\Omega_i)$ et satisfait

$$\|u_{\xi,i}\|_{\ell,\Omega_i} \lesssim p_\ell(|\lambda|)\bigg(\|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\bigg). \tag{3.30}$$

Ceci se fait à l'aide de Théorème 1.1.5 pour l'estimation (3.29) et de [28, Théorème 60, p. 106] pour l'estimation (3.30) pour $i = 2, 3$. Dès lors il faut montrer que $\tilde{h}_1 \in V^{\ell-2}_{\alpha}(\Omega_1; B)$

et que $\tilde{h}_i \in H^{\ell-2}(\Omega_i)$ pour $i = 2, 3$.
En effet, si on suppose que (3.28) est vrai pour $\ell - 1$ avec $\ell \in \{3, \ldots, m\}$, alors pour tout $\alpha_\ell > \ell - 1$, on a

$$\|\tilde{h}_1\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(\Omega_1;B)} \lesssim \|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|v_1\|_{V^{\ell-1}_{\alpha_\ell}(\tilde{B}_1;B)} + (|\lambda|^2 + |\lambda|)\|u_{\xi,1}\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(\Omega_1;B)},$$

et par l'hypothèse qu'on a mis, on trouve que

$$\|v_1\|_{V^{\ell-1}_{\alpha_\ell}(\tilde{B}_1;B)} \lesssim p_{\ell-1}(|\lambda|)\Bigg(\|h\|_{V^{\ell-3}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Bigg),$$

et

$$\|u_{\xi,1}\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(\tilde{B}_1;B)} \lesssim p_{\ell-2}(|\lambda|)\Bigg(\|h\|_{V^{\ell-4}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Bigg).$$

On en déduit alors que

$$\|\tilde{h}_1\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(\Omega_1;B)} \lesssim \Big(1 + p_{\ell-1}(|\lambda|) + p_{\ell-2}(|\lambda|)(|\lambda|^2 + |\lambda|)\Big)\Bigg(\|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Bigg),$$

avec $p_{\ell-1}(|\lambda|)$ (resp. $p_{\ell-2}(|\lambda|)$) un polynôme de degré $\ell - 1$ (resp. $\ell - 2$) en $|\lambda|$.
En appliquant le Théorème 1.1.5, on conclut que $u_{\xi,1} \in V^{\ell}_{\alpha_\ell}(\Omega_1; B)$ et satisfait (3.29) avec $p_\ell(|\lambda|) = 2 + p_{\ell-1}(|\lambda|) + p_{\ell-2}(|\lambda|)(|\lambda|^2 + |\lambda|)$.
De la même façon, on obtient que pour $i = 2, 3$,

$$\|\tilde{h}_i\|_{\ell-2,\Omega_i} \lesssim \Big(1 + p_{\ell-1}(|\lambda|) + p_{\ell-2}(|\lambda|)(|\lambda|^2 + |\lambda|)\Big)\Bigg(\|h\|_{V^{\ell-2}_{\alpha_\ell}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Bigg).$$

Donc grâce au [28, Théorème 60, p. 106], on obtient $u_{\xi,i} \in H^{\ell}(\Omega_i)$ et satisfait l'estimation (3.30) pour $i = 2, 3$.

On en déduit donc grâce à (3.29) et (3.30) que $w \in V^{\ell}_{\alpha_\ell}(S^2; B)$ et satisfait (3.28). ■

Ce résultat est d'un grand intérêt seulement pour des petites valeurs de λ comme la constante $p_m(|\lambda|)$ dans (3.23) dépend continûment de λ. Pour gérer cette difficulté, on utilise l'argument d'ajout d'une variable du Théorème 3.1.2.

Théorème 3.1.5. *Soient $\lambda_0 \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$ avec $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $m \geq 2$, $\alpha > m - 1$ et $h \in V^{m-2}_{\alpha}(S^2; B) \cap L^2(S^2)$ avec B le point d'intersection de la sphère unité avec le demi-axe des x positifs. Alors la solution $W_{\lambda,h} \in H^1(S^2)$ du problème*

$$(L_{S^2} + \lambda_0^2 + \lambda_0)w_{\lambda_0,h} = h \qquad \textit{dans } S^2, \tag{3.31}$$

appartient à $V^m_\alpha(S^2; B)$ avec

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda_0|^{2l}\|w_{\lambda_0,h}\|^2_{V^{m-l}_{\alpha}(S^2;B)} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda_0|^{2l}\|h\|^2_{V^{m-2-l}_{\alpha}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}. \tag{3.32}$$

Preuve : Par facilité, on écrit W_{ξ_0} au lieu de $W_{\lambda_0,h}$, où $\xi_0 = \Im\lambda_0$. Pour un $\xi_0 \in \mathbb{R}$ fixé, soit $\lambda_0 \in R[-\frac{1}{2}-\epsilon]$ avec $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, donc on a

$$\lambda_0^2 + \lambda_0 \;=\; (-\frac{1}{2}-\epsilon+i\xi_0)^2 + (-\frac{1}{2}-\epsilon+i\xi_0) = -\xi_0^2 - 2\epsilon i\xi_0 - \frac{1}{4} + \epsilon^2.$$

On peut réécrire (3.3) sous la forme

$$(L_{S^2} - \xi_0^2)W_{\xi_0} = h + 2\epsilon i\xi_0 W_{\xi_0} + (\frac{1}{4} - \epsilon^2)W_{\xi_0}, \qquad \text{dans } S^2.$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, définissons W_ξ la solution de

$$(L_{S^2} - \xi^2)W_{\xi} = h + 2\epsilon i\xi W_{\xi} + (\frac{1}{4} - \epsilon^2)W_{\xi}, \quad \text{dans } S^2. \tag{3.33}$$

Remarquons que en notant $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$, (3.33) s'écrit sous aussi :

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)W_\xi = h \quad \text{dans } S^2.$$

Par le Lemme 3.1.3, on sait déjà que $W_\xi \in H^1(S^2)$ et satisfait

$$\|W_\xi\|_{1,S^2,|\xi|} \lesssim \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.34}$$

Maintenant, considérons la suite de fonctions $(\phi_n)_n$ définie par $\phi_n = \sqrt{\varphi_n} \in L^2(\mathbb{R})$, où φ_n est définie par le Lemme 1.1.4 correspondant à ξ_0.
Définissons aussi

$$v_n(\Theta, \xi) = W_\xi(\Theta)\phi_n(\xi),$$

et

$$V_n(\Theta, z) = \Big(\mathfrak{F}_z^{-1}[v_n]\Big)(\Theta, z),$$

où $\mathfrak{F}_z^{-1}$ est la transformée de Fourier inverse partielle en z. Observons que V_n est défini sur $S^2 \times \mathbb{R}$. Dans cet ensemble, définissons la norme

$$\begin{aligned}\|V_n\|^2_{V^m_\alpha(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} := \sum_{|\gamma|\le m}\Big(\int_{B_1} r^{2(\alpha-m+|\gamma|)}\int_{\mathbb{R}}|D^\gamma V_n|^2 dz d\Theta + \int_{B_2}\int_{\mathbb{R}}|D^\gamma V_n|^2 dz d\Theta \\ + \int_{B_3}\int_{\mathbb{R}}|D^\gamma V_n|^2 dz d\Theta\Big),\end{aligned}$$

où $r = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$.

D'une part, pour tout $|\gamma| \le m$ on sait que, $D^\gamma V_n \in L^2(S^2 \times \mathbb{R})$ si et seulement si $\mathfrak{F}_z[D^\gamma V_n] \in L^2(S^2 \times \mathbb{R})$, ce qui est équivalent à

$$\forall\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \;:\; \gamma_3 \le m \text{ et } |(\gamma_1,\gamma_2)| \le m - \gamma_3,\; (i\xi)^{\gamma_3}\phi_n\partial^{(\gamma_1,\gamma_2)}W_\xi \in L^2(S^2 \times \mathbb{R}).$$

Cette dernière formulation étant satisfaite car, grâce au Lemme 3.1.4, $W_\xi \in V_\alpha^m(S^2; B)$ et vérifie l'estimation

$$\|W_\xi\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \lesssim p_m(|\lambda|)\Big(\|h\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Big),$$

avec $p_m(|\lambda|)$ un polynôme de degré inférieur ou égale à m en $|\lambda|$, et comme on a de plus $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $supp(\phi_n) \subset [\xi_0 - \frac{1}{n}, \xi_0 + \frac{1}{n}]$.
Par le théorème de Fubini, on déduit que pour tout $|\gamma| \leq m$, on a $D^\gamma V_n(\Theta, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ pour presque tous $\Theta \in S^2$, et on peut alors appliquer l'égalité de Parseval pour avoir

$$\begin{aligned}\|V_n\|^2_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\gamma_3\leq m}\ \sum_{|(\gamma_1,\gamma_2)|\leq m-\gamma_3}\Bigg(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\gamma_3}|\phi_n(\xi)|^2\int_{B_1} r^{2(\alpha-m+|\gamma|)}|\partial^{(\gamma_1,\gamma_2)}W_\xi|^2 d\Theta d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\gamma_3}|\phi_n(\xi)|^2\int_{B_2}|\partial^{(\gamma_1,\gamma_2)}W_\xi|^2 d\Theta d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\gamma_3}|\phi_n(\xi)|^2\int_{B_3}|\partial^{(\gamma_1,\gamma_2)}W_\xi|^2 d\Theta d\xi\Bigg).\end{aligned}$$

Par définition de la norme sur la sphère et comme $V_\alpha^m(S^2; B) \hookrightarrow V_\alpha^{m-l}(S^2; B)$, on obtient

$$\begin{aligned}\|V_n\|^2_{V_\alpha^m(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{l=0}^{m}|\xi|^{2l}\|W_\xi\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)}|\phi_n(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq p_m(|\lambda_0|)\sum_{l=0}^{m}\max\{|\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}\}\Big(\|h\|^2_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}\Big).\end{aligned}$$

D'autre part, comme v_n est solution de

$$(L_{S^2} - \xi^2)v_n = h\phi_n + 2\epsilon i\xi v_n + (\frac{1}{4} - \epsilon^2)v_n, \quad \text{dans } S^2\times\mathbb{R}, \tag{3.35}$$

en appliquant la transformée de Fourier inverse partielle en z, on déduit que V_n est solution du problème

$$(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n(\theta,\varphi,z) = h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n] + 2\epsilon\frac{\partial}{\partial z}V_n + (\frac{1}{4} - \epsilon^2)V_n, \quad \text{dans } S^2\times\mathbb{R}. \tag{3.36}$$

Étape 1 : Pour tout $\alpha_1 > 0$, $V_n \in V^1_{\alpha_1}(S^2\times\mathbb{R}; B\times\mathbb{R})$ avec

$$\|V_n\|_{V^1_{\alpha_1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.37}$$

Par l'identité de Parseval, on a

$$\|V_n\|^2_{V^1_{\alpha_1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{l=0}^{1}|\xi|^{2l}\|W_\xi\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_1}(S^2;B)}|\phi_n(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.38}$$

Donc selon la sous-section 1.1.4, et comme $H^1(B_1) \hookrightarrow H^1_{\alpha_1}(B_1;B) = V^1_{\alpha_1}(B_1;B)$ (par la Proposition 1.1.8), on obtient pour tout $l = 0, 1$,

$$\begin{aligned}\|W_\xi\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_1}(S^2;B)} &\simeq \|W_\xi\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_1}(B_1;B)} + \|W_\xi\|^2_{1-l,B_2} + \|W_\xi\|^2_{1-l,B_3} \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{3}\|W_\xi\|^2_{1-l,B_i} \simeq \|W_\xi\|^2_{1-l,S^2}.\end{aligned}$$

Par le Lemme 3.1.3, on trouve

$$\|W_\xi\|_{1,S^2,|\xi|} \leq \|h\|_{0,S^2}.$$

On en déduit par (3.38) et le Lemme 1.1.4 que pour tout $\alpha_1 > 0$, on a $V_n \in V^1_{\alpha_1}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$, avec

$$\|V_n\|^2_{V^1_{\alpha_1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \int_{\mathbb{R}}\|W_\xi\|^2_{1,S^2,|\xi|}|\phi_n(\xi)|^2 d\xi \lesssim \|h\|^2_{0,S^2}\|\phi_n\|^2_{0,\mathbb{R}} = \|h\|^2_{0,S^2}.$$

Étape 2 : Pour tout $\alpha_2 \geq \alpha - m + 2 > 1$, on a

$$\|V_n\|_{V^2_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.39}$$

Pour démontrer cela, nous allons appliquer le Théorème 3.1.2, pour avoir

$$\|V_n\|_{V^2_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|V_n\|_{V^1_{\alpha_2-1}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}. \tag{3.40}$$

L'estimation de la norme de V_n dans $V^1_{\alpha_2-1}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$ est déjà donnée par l'étape 1. Il reste donc à estimer la norme de $(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n$ dans $V^0_{\alpha_2}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$. En rappelant (3.36), on a besoin d'estimer chaque terme du membre à droite. Pour le premier terme, comme $h \in V^0_{\alpha_2}(S^2; B)$ et $\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n] \in L^2(\mathbb{R})$, on obtient $h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n] \in V^0_{\alpha_2}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$ avec

$$\|h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n]\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} = \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)}.$$

Pour les autres termes, on utilise (3.37) on obtient

$$\|\frac{\partial}{\partial z}V_n\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + \|V_n\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|V_n\|_{V^1_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{0,S^2}.$$

On en déduit que

$$\|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{V^0_{\alpha_2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}. \tag{3.41}$$

L'estimation (3.39) peut être déduite facilement par (3.40), (3.37) et (3.41).

Étape 3 : Pour tout $\alpha_3 \geq \alpha - m + 3 > 2$, on a l'estimation

$$\|V_n\|^2_{V^3_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \sum_{l=0}^{1} \max\{|\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}\}\|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}. \tag{3.42}$$

De nouveau, pour démontrer cela, nous allons appliquer le Théorème 3.1.2, et donc il faut estimer la norme de $(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n$ dans $V^1_{\alpha_3}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$, ou encore la norme de chaque terme du membre à droite de (3.36), c-à-d.

$$\begin{aligned}\|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n\,\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} &\leq \|h\mathfrak{F}^{-1}(\phi_n)\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \\ &+|\frac{1}{4} - \epsilon^2|\|V_n\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} + 2|\epsilon|\|\frac{\partial}{\partial z}V_n\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Par (3.37), on a $V_n \in V^1_{\alpha_3}(S^2 \times \mathbb{R}; B \times \mathbb{R})$ avec

$$\|V_n\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \|h\|_{0,S^2}.$$

De plus, par passage aux cartes locales, on a

$$\|\frac{\partial}{\partial z}V_n\|^2_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \quad \leq \quad \|V_n\|^2_{V^2_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})},$$

on déduit donc grâce à (3.39), que

$$\|\frac{\partial}{\partial z}V_n\|^2_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \quad \lesssim \quad \|h\|^2_{V^0_{\alpha_3}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2} \lesssim \|h\|^2_{0,S^2}.$$

Il nous reste à estimer $\|h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n]\|_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})}$. On a

$$\|h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n]\|^2_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} = \sum_{l=0}^{1} \|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)} \int_{\mathbb{R}} |\partial^l \mathfrak{F}^{-1}[\phi_n](z)|^2 dz. \tag{3.43}$$

D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\partial}{\partial z}V_n = \frac{\partial}{\partial z}\Big(W_\xi \mathfrak{F}^{-1}(\phi_n)\Big) \in L^2(S^2 \times \mathbb{R}).$$

Comme $W_\xi \in L^2(S^2)$, on conclut donc que $\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n] \in L^2(\mathbb{R})$ et alors

$$\partial^l \mathfrak{F}^{-1}[\phi_n] \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall |l| \leq 1.$$

Par (3.43) et par application de l'égalité de Parseval , on a

$$\|h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n]\|^2_{V^1_{\alpha_3}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{1}\|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)}\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2l}|\phi_n(\xi)|^2 d\xi.$$

Comme ϕ_n est à support inclus dans $[\xi_0 - \frac{1}{n}, \xi_0 + \frac{1}{n}]$, on déduit que

$$\|h\mathfrak{F}^{-1}[\phi_n]\|^2_{V^1_{\alpha_3}(D;B\times\mathbb{R})} \lesssim \sum_{l\leq 1}\max\{|\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}\}\|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)}.$$

On déduit alors, que

$$\|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n\|^2_{V^1_{\alpha_3}(D;B\times\mathbb{R})} \lesssim \sum_{l=0}^{1}\max\{|\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}\}\|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}. \tag{3.44}$$

On conclut par application du Théorème 3.1.2, et grâce aux inégalités (3.37) et (3.44), que

$$\begin{aligned}\|V_n\|^2_{V^3_{\alpha_3}(D;B\times\mathbb{R})} &\lesssim \|(L_{S^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V_n\|^2_{V^1_{\alpha_3}(D;B\times\mathbb{R})} + \|V_n\|^2_{V^1_{\alpha_3-2}(D;B\times\mathbb{R})}\\ &\lesssim \sum_{l=0}^{1}\max\{|\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}\}\|h\|^2_{V^{1-l}_{\alpha_3}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}.\end{aligned}$$

Étape 4 : Conclusion.

Par itération, pour tout $m \geq 2$ et $\alpha_m \geq \alpha > m-1$, on peut montrer que

$$\|V_n\|^2_{V^m_{\alpha_m}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2}\max\{|\xi_0 + \frac{1}{n}|^{2l}, |\xi_0 - \frac{1}{n}|^{2l}\}\|h\|^2_{V^{m-2-l}_{\alpha_m}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}. \tag{3.45}$$

Rappelons que grâce à l'égalité de Parseval, on a

$$\|V_n\|^2_{V^m_{\alpha_m}(S^2\times\mathbb{R};B\times\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{l=0}^{m}|\xi|^{2l}\|W_\xi\|^2_{V^{m-l}_{\alpha_m}(S^2;B)}|\phi_n(\xi)|^2 d\xi,$$

donc grâce à la Remarque 3.1.6 et par application du Lemme 1.1.4 et l'inégalité (3.45), on en déduit quand $n \to \infty$ que, $W_{\xi_0} \in V^m_\alpha(S^2;B)$ avec l'estimation

$$\sum_{l=0}^{m}|\xi_0|^{2l}\|W_{\xi_0}\|^2_{V^{m-l}_{\alpha_m}(S^2;B)} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2}|\xi_0|^{2l}\|h\|^2_{V^{m-2-l}_{\alpha_m}(S^2;B)} + \|h\|^2_{0,S^2}.$$

Ce qui prouve que (3.32) pour $|\xi_0| > 1$ comme $|\xi_0| \simeq |\lambda_0|$ dans ce cas.
Finalement, pour $|\xi_0| \leq 1$, (3.32) tient directement par le Lemme 3.1.4. ■

Remarque 3.1.6. *Dans la preuve du Théorème 3.1.5, on peut appliquer le Lemme 1.1.4 comme pour $m \geq 1$ et $\alpha > m-1$, en notant W_ξ la solution de* (3.3)*, l'application*

$$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \sum_{l=0}^{m} |\xi|^{2l} \|W_\xi\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)},$$

est continue. En effet, pour un $\xi_1 \in \mathbb{R}$ fixé et $\xi_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Bigg| \sum_{l=0}^{m} |\xi_1|^{2l} \|W_{\xi_1}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} - \sum_{l=0}^{m} |\xi_2|^{2l} \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \Bigg| & \\ = \Bigg| \sum_{l=0}^{m} |\xi_1|^{2l} \Big(\|W_{\xi_1}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2)} - \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \Big) & \\ + \sum_{l=0}^{m} \Big(|\xi_1|^{2l} - |\xi_2|^{2l} \Big) \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \Bigg|. &\end{aligned}$$

Mais, par l'inégalité triangulaire on sait que

$$\begin{aligned}\Big| \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} - \|W_{\xi_1}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \Big| &\leq \|W_{\xi_2} - W_{\xi_1}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \\ &\quad + 2 \|W_{\xi_1}\|_{V_\alpha^{m-l}(S^2)} \|W_{\xi_1} - W_{\xi_2}\|_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)},\end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}\Bigg| \sum_{l=0}^{m} |\xi_1|^{2l} \| W_{\xi_1}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} - \sum_{l=0}^{m} |\xi_2|^{2l} \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \Bigg| & \\ \leq \sum_{l=0}^{m} |\xi_1|^{2l} \|W_{\xi_1} - W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} + \sum_{l=0}^{m} \Big| |\xi_1|^{2l} - |\xi_2|^{2l} \Big| \|W_{\xi_2}\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} & \quad (3.46) \\ + 2 \sum_{l=0}^{m} |\xi_1|^{2l} \|W_{\xi_1}\|_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \|W_{\xi_1} - W_{\xi_2}\|_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)}. &\end{aligned}$$

D'autre part, posons $v := W_{\xi_1} - W_{\xi_2}$ qui est solution de

$$L_{S^2} v + (\lambda_1^2 + \lambda_1) v = (\lambda_2^2 + \lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_1) W_{\xi_2}, \quad \textit{dans } S^2.$$

Par le Lemme 3.1.4, on a $v \in V_\alpha^m(S^2; B)$ avec

$$\|v\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \lesssim c_1(\xi_1) |\lambda_2^2 + \lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_1| \Big(\|W_{\xi_2}\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|W_{\xi_2}\|_{0,S^2} \Big).$$

Encore par le Lemme 3.1.4, on obtient une constante $c_2(\xi_1)$ telle que, pour tout ξ_2 dans un voisinage de ξ_1,

$$\|W_{\xi_2}\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \lesssim c_2(\xi_1) \Big(\|h\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2} \Big). \qquad (3.47)$$

Par conséquent, grâce au Lemme 3.1.3 et à l'estimation (3.47)*, on conclut que*

$$\|v\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \leq c_3(\xi_1)|\lambda_2^2 + \lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_1|\Big(\|h\|_{V_\alpha^{m-2}(S^2;B)} + \|h\|_{0,S^2}\Big), \tag{3.48}$$

si ξ_2 *est dans un voisinage de* ξ_1.

Retournons à (3.46). *Grâce à* (3.47) *et* (3.48)*, le membre de droite de* (3.46) *tend vers zéro lorsque* $\xi_2 \to \xi_1$*, d'où la continuité de l'application* N.

3.1.3 Problème de Helmholtz sur la sphère unité avec un second membre Dirac

Montrons maintenant l'existence d'une solution et des résultats de régularité pour le problème (3.2) avec $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$.

Rappelons que le point B est couvert par la représentation correspondante au coordonnées sphériques standard ϕ_1^{-1}, i.e.

$$\phi_1^{-1}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

et correspond dans cette carte à $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$. De plus, dans cette carte, L_{S^2} prend la forme

$$L_{S_2} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Ainsi cet opérateur gelé en B n'est rien d'autre que l'opérateur de Laplace.

Pour résoudre (3.2), comme dans le cas précédent, nous allons décomposer v_λ sous la forme :

$$v_\lambda = (1-\eta)\,\mathcal{H}_\lambda + w_\lambda, \tag{3.49}$$

où $\eta \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ est une fonction de troncature qui vérifie pour $\delta > 0$ assez petit,

$$\begin{cases} \eta = 0, & \text{sur } B(B,\delta), \\ \eta = 1, & \text{sur } B(B,2\delta)^c, \end{cases}$$

avec

$$B(B,\delta) = \left\{(\theta,\varphi) \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\times]\frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\;\middle|\; \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2} < \delta\right\},$$

et tel que $B(B,2\delta) \subset B_1$, et pour $k \in \mathbb{C}$ tel que $\Im k > 0$ et $k^2 = \lambda^2 + \lambda$, soit

$$\mathcal{H}_\lambda := \begin{cases} H_0(\theta - \frac{\pi}{2}, \varphi), & \text{si } |k| \leq 1, \\ H_k(\theta - \frac{\pi}{2}, \varphi), & \text{si } |k| > 1, \end{cases}$$

avec H_0 la solution fondamentale de

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)H_0=\delta_B,$$

et pour $k\neq 0$, H_k la solution fondamentale de

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k^2\Big)H_k=\delta_B.$$

Dans cette écriture, nous entendons que $\eta=1$ sur $B_2\cup B_3$ et donc $supp(1-\eta)\subset B_1$, et on a besoin seulement de $\mathcal{H}_\lambda$ sur B_1, d'où le sens de (θ,φ) est clair.
De plus, comme $(1-\eta)\mathcal{H}_\lambda=0$ sur $B_2\cup B_3$, on a

$$\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)\Big((1-\eta)\ \mathcal{H}_\lambda\Big)=0 \text{ sur } B_2\cup B_3,$$

et il reste à déterminer $\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)\Big((1-\eta)\ \mathcal{H}_\lambda\Big)$ sur B_1. Déterminons le problème que doit vérifier w_λ pour que v_λ soit solution de (3.2). On distingue deux cas :

1. **Premier cas :** $|k|>1$. Sur B_1, par la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)\Big((1-\eta)\mathcal{H}_\lambda\Big)=&\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\lambda^2+\lambda\Big)\Big((1-\eta)H_k\Big)\\&+\Big(\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)-(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\lambda^2+\lambda)\Big)\Big((1-\eta)H_k\Big)\\=&(1-\eta)\delta_B+H_k\,(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})(1-\eta)+2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_k\\&+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big((1-\eta)H_k\Big)+\Big(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\Big)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big((1-\eta)H_k\Big)\\=&(1-\eta)\delta_B+h_{k,1}+h_{k,2}+h_{k,3}+h_{k,4}+h_{k,5}.\end{aligned}$$

2. **Deuxième cas :** $|k|\le 1$. Comme dans le premier cas, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)\Big((1-\eta)\mathcal{H}_\lambda\Big)=&\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)\Big((1-\eta)H_0\Big)\\&+\Big(\mathcal{L}(\Theta,\lambda,\partial_\Theta)-(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})\Big)\Big((1-\eta)H_0\Big)\\=&(1-\eta)\delta_B+H_0(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})(1-\eta)+2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla H_0\\&+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big((1-\eta)H_0\Big)+\Big(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\Big)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big((1-\eta)H_0\Big)\\&+(\lambda^2+\lambda)(1-\eta)H_0\\=&(1-\eta)\delta_B+h_{k,1}+h_{k,2}+h_{k,3}+h_{k,4}+h_{k,5}+h_{k,6},\end{aligned}$$

Par conséquent, v_λ est solution de (3.2) si et seulement si w_λ, défini dans (3.49), est solution de

$$\mathcal{L}(\Theta, \lambda, \partial_\Theta) w_\lambda = -h_\lambda, \qquad \text{dans } S^2, \tag{3.50}$$

où $h_\lambda = 0$ sur $B_2 \cup B_3$ et h_λ est défini sur B_1 par

$$h_\lambda = \sum_{j=1}^{6} h_{\lambda,j}, \tag{3.51}$$

où :

$$\begin{aligned}
h_{\lambda,1} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial \mathcal{H}_\lambda}{\partial\theta}(1-\eta), \\
h_{\lambda,2} &= \Big(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\Big) \frac{\partial^2 \mathcal{H}_\lambda}{\partial\varphi^2}(1-\eta), \\
h_{\lambda,3} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \mathcal{H}_\lambda\ \frac{\partial(1-\eta)}{\partial\theta}, \\
h_{\lambda,4} &= \Big(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\Big) \Big[2\frac{\partial(1-\eta)}{\partial\varphi}\ \frac{\partial \mathcal{H}_\lambda}{\partial\varphi} + \mathcal{H}_\lambda\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(1-\eta) \Big], \\
h_{\lambda,5} &= \mathcal{H}_\lambda\ (\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})(1-\eta) + 2\nabla(1-\eta)\cdot\nabla\mathcal{H}_\lambda, \\
h_{\lambda,6} &= \begin{cases} 0, & \text{si } |k| > 1, \\ (\lambda^2+\lambda)(1-\eta) H_0, & \text{si } |k| \le 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le but d'obtenir une solution variationnelle pour le problème (3.50), on montre que $h_\lambda \in L^2(S^2)$ uniformément en λ.

Lemme 3.1.7. *Pour h_λ défini par* (3.51) *on a $h_\lambda \in L^2(S^2)$ avec*

$$\|h_\lambda\|_{0,S^2} \lesssim 1.$$

Preuve : Comme $h_\lambda = 0$ est nulle en dehors de $B(B, 2\delta)$, il suffit d'estimer $\|h_{\lambda,j}\|_{0,B(B,2\delta)}$, $j = 1, ..., 6$. Rappelons que $h_{\lambda,1}$ est défini par

$$h_{\lambda,1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial \mathcal{H}_\lambda}{\partial\theta}(1-\eta).$$

Comme $|\cos\theta| \simeq |\theta - \frac{\pi}{2}| \lesssim r$ sur B_1 avec $r = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$ la distance au point B, on obtient

$$\|h_{\lambda,1}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_1^1(B(B,2\delta);B)}.$$

Ainsi que pour $h_{\lambda,2}$ donné par

$$h_{\lambda,2} = \Big(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\Big) \frac{\partial^2 \mathcal{H}_\lambda}{\partial\varphi^2}(1-\eta),$$

h_{λ_2} vérifie
$$\|h_{\lambda,2}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_2^2(B(B,2\delta);B)}.$$
Donc par le Lemme 2.1.8, on a
$$\|h_{\lambda,1}\|_{0,B(B,2\delta)} + \|h_{\lambda,2}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim 1.$$

Maintenant pour tout $j = 3, 4, 5$, remarquons que $h_{\lambda,j}$ a un support compact dans $B(B, 2\delta)\backslash B(B, \delta)$, et on a
$$\|h_{\lambda,j}\|_{0,B_1} \lesssim \|\mathcal{H}_\lambda\|_{1,B(B,2\delta)\backslash B(B,\delta)} \lesssim \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\varepsilon^1(B(B,2\delta);B)},$$
pour tout $\varepsilon > 0$ (car $r \simeq 1$ sur $B(B, 2\delta)\backslash B(B, \delta)$). Donc par le Lemme 2.1.8, on conclut que
$$\|h_{\lambda,j}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim 1, \forall j = 3, 4, 5.$$

Pour $j = 6$, comme $|k| \leq 1$, on a
$$\|h_{\lambda,6}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim \|H_0\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim \|H_0\|_{V_{\epsilon-1}^0(B(B,2\delta);B)} \lesssim \|H_0\|_{V_\epsilon^1(B(B,2\delta);B)},$$
pour tout $0 < \epsilon < 1$. De nouveau grâce au Lemme 2.1.8, on déduit que
$$\|h_{\lambda,6}\|_{0,B(B,2\delta)} \lesssim 1.$$

■

Plus tard, on a besoin d'un résultat similaire dans les espaces de Sobolev avec poids.

Lemme 3.1.8. *La fonction h_λ définie par (3.51) appartient à l'espace $V_\alpha^{m-2}(S^2; B)$ pour tout $m \geq 2$ et $\alpha > m - 1$, où ici $r = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$ et B est le point d'intersection de la sphère unité avec l'axe des x positifs. De plus h_λ satisfait l'estimation*
$$\sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|h_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(S^2;B)} \lesssim 1. \tag{3.52}$$

Preuve : Par passage aux cartes locales, on est amené à travailler sur des parties de $\mathbb{R}^2$ (voir la Sous-section 1.1.4).
Rappelons que $h_\lambda = 0$ en dehors de $B(B, 2\delta)$, donc montrer que $h_\lambda \in V_\alpha^{m-2}(S^2; B)$ revient à montrer $h_\lambda \in V_\alpha^{m-2}(B(B, 2\delta); B)$ avec $r = \sqrt{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 + \varphi^2}$.

Montrons le résultat pour $h_{\lambda,1}$. D'après le Lemme 2.1.8, on a $\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^m(B(B, 2\delta); B)$. Donc $\partial_i\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^{m-1}(B(B, 2\delta); B)$ avec l'inégalité
$$\|\partial_i\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^{m-1}(B(B,2\delta);B)} \leq \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^m(B(B,2\delta);B)}, \tag{3.53}$$

et en particulier $\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg(\mathcal{H}_\lambda(\theta-\frac{\pi}{2},\varphi)\Bigg) \in V_\alpha^{m-1}(B(B,2\delta);B)$. Puisque $B(B,2\delta)$ est bornée, on a

$$V_\alpha^{m-1}(B(B,2\delta);B) \hookrightarrow V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B). \tag{3.54}$$

On en déduit alors,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg(\mathcal{H}_\lambda(\theta-\frac{\pi}{2},\varphi)\Bigg) \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B). \tag{3.55}$$

Comme $(1-\eta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \in C^\infty(\overline{B(B,2\delta)})$, on peut appliquer le lemme 1.1.3 pour avoir $h_{\lambda,1} \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$ avec

$$\sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|h_{\lambda,1}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} \lesssim \sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{H}_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)}.$$

En utilisant (3.53), (3.54), (3.55) et le Lemme 2.1.8, avec $|k|^2 \simeq |\lambda|^2$ pour $|\lambda|$ grand et $|\lambda|^2 \lesssim |\lambda| \simeq |k|^2$ pour $|\lambda|$ borné, en plus de la dernière inégalité, on obtient $h_{\lambda,1} \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$ avec l'inégalité

$$\sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|h_{\lambda,1}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} \quad\lesssim\quad \sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|\mathcal{H}_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-j}(B(B,2\delta);B)} \lesssim 1.$$

Montrons le résultat pour $h_{\lambda,2}$. Par le Lemme 2.1.8, on obtient $\partial_i\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^{m-1}(B(B,2\delta);B)$ et de même $\partial_j\partial_i\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$ avec l'inégalité

$$\|\partial_j\partial_i\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)} \le \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^{m}(B(B,2\delta);B)}. \tag{3.56}$$

On en déduit $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Bigg(\mathcal{H}_\lambda(\theta-\frac{\pi}{2},\varphi)\Bigg) \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$.
Or $(1-\eta)(\frac{1}{\sin^2\theta}-1) \in C^\infty(\overline{B(B,2\delta)})$, en appliquant le Lemme 1.1.3 et en utilisant l'inégalité (3.56) et le Lemme 2.1.8 (avec $|k|^2 \simeq |\lambda|^2$ pour $|\lambda|$ grand et $|\lambda|^2 \lesssim |\lambda| \simeq |k|^2$ pour $|\lambda|$ borné), on conclut donc que $h_{\lambda,2} \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$ avec l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|h_{\lambda,2}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} &\lesssim \sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|\frac{\partial^2\mathcal{H}_\lambda}{\partial\varphi^2}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)}\\ &\lesssim \sum_{j=0}^{m-2}|\lambda|^{2j}\|H_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-j}(B(B,2\delta);B)} \lesssim 1.\end{aligned}$$

De même et grâce au Lemme 2.1.8 avec $|k|^2 \simeq |\lambda|^2$, pour $|\lambda|$ grand et $|\lambda|^2 \lesssim |\lambda| \simeq |k|^2$

pour $|\lambda|$ borné , on trouve que $h_{\lambda,3}, h_{\lambda,4}, h_{\lambda,5}$ appartiennent à $V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$, avec

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|h_{\lambda,3}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} &\lesssim 1,\\
\sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|h_{\lambda,4}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} &\lesssim 1,\\
\sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|h_{\lambda,5}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} &\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 2.1.8, on a $(1-\eta)H_0 \in V_\alpha^m(B(B,2\delta);B)$. Comme $B(B,2\delta)$ est bornée, on a

$$V_\alpha^m(B(B,2\delta);B) \hookrightarrow V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B).$$

Par conséquent $(1-\eta)H_0 \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$. On déduit donc, puisque $|\lambda|$ est borné, que $h_{\lambda,6} \in V_\alpha^{m-2}(B(B,2\delta);B)$ avec

$$\sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|h_{\lambda,6}\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} \le \|1-\eta\|^2_{\mathcal{C}^\infty(S^2)} \sum_{j=0}^{m-2} |\lambda|^{2j} \|H_0\|^2_{V_\alpha^{m-2-j}(B(B,2\delta);B)} \lesssim 1.$$

■

Théorème 3.1.9. *Soient $\lambda \in R[-\frac{1}{2}-\epsilon]$ avec $\epsilon \in (0,\frac{1}{2})$ et B le point d'intersection de la sphère unité avec le demi-axe des x positifs. Alors le problème*

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)v_\lambda = \delta_B, \qquad \text{dans } S^2, \tag{3.57}$$

où L_{S^2} est l'opérateur de Laplace Beltrami défini sur la sphère S^2, admet une unique solution v_λ dans $\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha^1(S^2;B)$ dans le sens qu'elle est l'unique élément dans $\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha^1(S^2;B)$ qui satisfait

$$\int_{S^2} \Big(\nabla_T v_\lambda \cdot \overline{\nabla_T w} - (\lambda^2+\lambda) v_\lambda \overline{w}\Big) = -\overline{w}(B), \quad \forall w \in \bigcup_{\alpha>0} H^1_{-\alpha}(S^2;B). \tag{3.58}$$

De plus, cette solution v_λ appartient à $V_\alpha^m(S^2;B)$ pour tout $m \ge 1$ et $\alpha > m-1$, avec l'estimation

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|v_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim 1. \tag{3.59}$$

Remarque 3.1.10. *Observons que, en utilisant [11, Lemme 11.2.2] ou [13, Théorème 3.23], la trace des fonctions $w \in H^1_{-\alpha}(S^2;B)$ est bien définie, ce qui donne un sens à $w(B)$.*
Rappelons aussi que pour $\alpha > 0$, on a $V_\alpha^1(S^2;B) = H_\alpha^1(S^2;B)$ par la Proposition 1.1.8.

Preuve : Rappelons que, à l'aide d'une fonction de troncature η, qui est nulle au voisinage du point B, la solution v_λ est décomposée en $(1-\eta)\mathcal{H}_\lambda$ et w_λ (sous la forme (3.49)), avec

w_λ la solution du problème (3.50) (ou encore la solution du problème de Helmholtz défini sur la sphère (3.3) avec un second membre $h = -h_\lambda$).

Étape 1 : Existence de la solution.
Par le Lemme 3.1.7, le second membre h_λ de (3.50) est dans $L^2(S^2)$. En appliquant le Lemme 3.1.3, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle $w_\lambda \in H^1(S^2) \hookrightarrow H^1_\alpha(S^2) \hookrightarrow V^1_\alpha(S^2)$ (grâce à la Proposition 1.1.8).
En rappelant que v_λ s'écrit sous la forme (3.49), et en utilisant le Lemme 2.1.8, on conclut que v_λ appartient à $\bigcap_{\alpha>0} V^1_\alpha(S^2; B)$.
Comme v_λ est solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)v_\lambda = \delta_B, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(S^2),$$

on déduit qu'elle satisfait (3.58) par la densité de $\mathcal{D}(S^2)$ dans $H^1_{-\alpha}(S^2; B)$ dans le cas $\alpha \in (0, 1)$ et par la densité de $\mathcal{D}(S^2\backslash\{B\})$ dans $H^1_{-\alpha}(S^2; B)$ dans le cas $\alpha \geq 1$ (voir la Proposition 1.1.16).

Étape 2 :Unicité de la solution.
Supposons que (3.58) admet deux solutions dans $\bigcap_{\alpha>0} V^1_\alpha(S^2; B)$, alors leur différence d satisfait

$$\int_{S^2}\Big(\nabla_T d \cdot \overline{\nabla_T w} - (\lambda^2 + \lambda)d\,\overline{w}\Big) = 0, \quad \forall w \in \bigcup_{\alpha>0} H^1_{-\alpha}(S^2; B). \tag{3.60}$$

Remarquons que $d \in V^1_\alpha(S^2; B) \hookrightarrow L^2(S^2)$ pour $0 < \alpha < 1$. Considérons alors $w \in H^1(S^2)$ la solution de

$$L_{S^2}w + \overline{(\lambda^2 + \lambda)}w = d, \quad \text{dans } S^2,$$

donnée par le Lemme 3.1.3, i.e. pour tout $\varphi \in H^1(S^2)$, w satisfait

$$\int_{S^2}\Big(\nabla_T w \cdot \overline{\nabla_T \varphi} - (\overline{\lambda^2 + \lambda})w\,\overline{\varphi}\Big) = -\int_{S^2} d\,\overline{\varphi}. \tag{3.61}$$

La Remarque 2.4 de [10] implique que cette solution w est dans $H^2(S^2)$. En utilisant le Corollaire 1.1.12, on obtient $w \in H^1_{-\alpha}(S^2; B)$ pour $\alpha \in (0, 1)$.
Soit maintenant $(d_n)_n \subset \mathcal{D}(S^2)$ telle que $d_n \to d$ dans $H^1_\alpha(S^2; B)$ (voir la Proposition 1.1.16). Donc par (3.61), on a

$$\int_{S^2} \nabla_T w \cdot \overline{\nabla_T d_n} - (\overline{\lambda^2 + \lambda}) \int_{S^2} w\,\overline{d_n} + \int_{S^2} d\,\overline{d_n} = 0.$$

Ainsi par (3.60), on passe à la limite et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \overline{\left[\int_{S^2} \nabla_T w \cdot \overline{\nabla_T d_n} - (\overline{\lambda^2 + \lambda}) \int_{S^2} w\,\overline{d}_n + \int_{S^2} d\,\overline{d}_n\right]} \\ &= \int_{S^2} \overline{\nabla_T w} \cdot \nabla_T d - (\lambda^2 + \lambda) \int_{S^2} \overline{w}\, d + \int_{S^2} \overline{d}\, d = \int_{S^2} |d|^2. \end{aligned}$$

i.e. $d = 0$ p.p. dans S^2. Ce qui prouve l'unicité.

Étape 3 :Régularité et estimation.
Vérifions d'abord que le premier terme, notamment $(1-\eta)\mathcal{H}_\lambda$, appartient à $V_\alpha^m(S^2; B)$ et satisfait l'estimation cherchée.
Par le Lemme 2.1.8, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^m(B_i; B),$$

où B_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ sont les parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ définies dans la Sous-section 1.1.4 et r dans ce cas est la distance au point B (le point d'intersection de la sphère avec le demi-axe des x positifs).
Comme $B \notin B_2 \cup B_3$, $\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^m(B_i)$ est équivalent à $\mathcal{H}_\lambda \in H^m(B_i)$ pour $i = 2, 3$ et donc, vu la définition de $\|\cdot\|_{V_\alpha^m(S^2;B)}$, on a

$$\|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^m(S^2;B)} \simeq \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^m(B_1;B)} + \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^m(B_2;B)} + \|\mathcal{H}_\lambda\|_{V_\alpha^m(B_3;B)}.$$

Alors par le Lemme 1.1.3, $(1-\eta)\mathcal{H}_\lambda \in V_\alpha^m(S^2; B)$ et vérifie grâce au Lemme 2.1.8,

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|(1-\eta)\mathcal{H}_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim 1. \tag{3.62}$$

D'où il reste à vérifier une estimation similaire pour w_λ.
Dans le cas $m = 1$, comme $H^1(S^2) \hookrightarrow H_\alpha^1(S^2; B) = V_\alpha^1(S^2; B)$ pour tout $\alpha > 0$ (voir la Proposition 1.1.8), alors les Lemmes 3.1.3 et 3.1.7 donnent

$$\sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|w_\lambda\|^2_{V_\alpha^{1-l}(S^2;B)} \lesssim 1. \tag{3.63}$$

D'autre part, pour $m \geq 2$ par le Théorème 3.1.5, $w_\lambda \in V_\alpha^m(S^2; B)$ pour tout $\alpha > m - 1$ et vérifie

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|w_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda|^{2l} \|h_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-2-l}(S^2;B)} + \|h_\lambda\|^2_{0,S^2}.$$

Donc par les Lemmes 3.1.7 et 3.1.8, on obtient

$$\sum_{l=0}^{m} |\lambda|^{2l} \|w_\lambda\|^2_{V_\alpha^{m-l}(S^2;B)} \lesssim 1. \tag{3.64}$$

La conclusion suit par les estimations (3.62), (3.63) et (3.64). ∎

Remarque 3.1.11. *Observons que, pour tout $\alpha \in (0, 1)$, on prouve l'unicité de la solution $v_\lambda \in V_\alpha^1(S^2; B)$ du problème*

$$\int_{S^2} \left(\nabla_T v_\lambda \cdot \overline{\nabla_T w} - (\lambda^2 + \lambda) v_\lambda \overline{w} \right) = -\overline{w(B)}, \quad \forall w \in H_{-\alpha}^1(S^2; B).$$

3.2 L'équation de Laplace sur un domaine tridimensionnel avec une fracture semi-infinie

Considérons le problème

$$-\Delta u = q\, \delta_\sigma + h, \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \tag{3.65}$$

où σ est une demi-droite de $\mathbb{R}^3$. Sans perdre de généralité, nous considérons que cette demi-droite est $\{(x,0,0) \mid x > 0\}$, le demi-axe des x positifs. Dans cette section, on prouve l'existence d'une unique solution de (3.65) au sens faible ainsi que des résultats de régularité.

Théorème 3.2.1. *Soient $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ et σ le demi-axe des x positifs. Soient $q \in L^2_\epsilon(\mathbb{R}^+; 0)$ et $h \in V^0_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3; 0)$. Alors le problème (3.65) a une unique solution $u \in V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma)$, dans le sens qu'elle est l'unique fonction dans $V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma)$ qui satisfait*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u(x,y,z) \cdot \overline{\nabla \psi(x,y,z)}\, dxdydz = \int_0^\infty q(x) \overline{\psi(x,0,0)} dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} h(x,y,z) \overline{\psi(x,y,z)}\, dxdydz, \qquad \forall \psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3; \sigma). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Cette solution satisfait l'estimation

$$\|u\|_{V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \|q\|_{L^2_\epsilon(\mathbb{R}^+;0)} + \|h\|_{V^0_{\epsilon+1}(\mathbb{R}^3;0)}.$$

Si $m \geq 2$, $\alpha \in (m-1, m-\frac{1}{2})$, $h \in V^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}^3; 0)$ et $q \in L^2_{\alpha-m+1}(\mathbb{R}^+; 0)$ alors $u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3; \sigma)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \|q\|_{L^2_{\alpha-m+1}(\mathbb{R}^+;0)} + \|h\|_{V^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}^3;0)}.$$

Remarque 3.2.2. *Rappelons que, par le Corollaire 1.4.5, on a $V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma) = M^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma)$ pour $\epsilon > 0$.*

Preuve : Soit $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$. Comme $q \in L^2_\epsilon(\mathbb{R}^+; 0)$ et $h \in V^0_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^3; 0)$, observons que par le Théorème 1.3.3, $\mathfrak{M}[q](\lambda)$ et $\mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot)$ sont bien définis et satisfont

$$\int_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} |\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2 d\Im\lambda < \infty \text{ et } \int_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} \|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{0,S^2} d\Im\lambda < \infty.$$

Ceci implique en particulier que, pour presque tout $\lambda \in R[-\frac{1}{2}-\epsilon]$, $\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot) \in L^2(S^2)$.

Comme $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, on considère v_λ la solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda) v_\lambda = \delta_B, \quad \text{dans} \quad S^2, \tag{3.67}$$

où L_{S^2} est l'opérateur de Laplace Beltrami défini sur la sphère unité S^2 et B est le point d'intersection de la sphère avec le demi-axe des x positifs, donnée par le Théorème 3.1.9. Soit maintenant w_λ la solution de

$$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)w_\lambda = \mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot), \quad \text{dans} \quad S^2. \tag{3.68}$$

Pour presque tout $\lambda \in R[-\frac{1}{2} - \epsilon]$, comme le second membre $\mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot) \in L^2(S^2)$ alors $w_\lambda := W_{\lambda, \mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)}$, qui est aussi solution de (3.3) avec $\mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot)$ comme second membre, appartient à $H^1(S^2)$ selon le Lemme 3.1.3.
Rappelons que pour tout $\alpha > 0$, le Théorème 3.1.9 et le Lemme 3.1.3 donnent aussi les estimations

$$\sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \|v_\lambda\|^2_{V_\alpha^{1-l}(S^2;B)} \lesssim 1 \;\; \text{et} \;\; \|w_\lambda(\lambda, \cdot)\|_{1,S^2,|\lambda|} \lesssim \|\mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot)\|_{0,S^2}.$$

Comme $\alpha > 0$, en utilisant les cartes locales qui recouvrent S^2 et grâce à la Proposition 1.1.8, on obtient $H^1(S^2) \hookrightarrow H^1_\alpha(S^2; B) = V^1_\alpha(S^2; B)$. On en déduit alors en intégrant sur la droite $\Re\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon$, que

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} \sum_{l=0}^{1} |\lambda|^{2l} \| \, v_\lambda(\cdot)\mathfrak{M}[q](\lambda) + w_\lambda(\lambda, \cdot)\|^2_{V_\alpha^{1-l}(S^2;B)} d\Im\lambda \\ &\qquad \lesssim \int\limits_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} |\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2 d\Im\lambda + \int\limits_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} \|\mathfrak{M}[h](\lambda - 2, \cdot)\|^2_{0,S^2} d\Im\lambda < +\infty. \end{aligned}$$

En particulier, ceci reste vrai pour $\alpha = \epsilon$ et par le Théorème 1.3.7, la transformée de Mellin inverse de

$$-v_\lambda(\cdot)\mathfrak{M}[q](\lambda) - w_\lambda(\lambda, \cdot),$$

existe et appartient à $V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma)$. Notons par u cette fonction.

Étape 1 : Montrons que u est solution variationnelle de (3.66).
Par le Lemme 1.4.6, pour tout $u \in V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3; \sigma)$ et $\psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3; \sigma)$, on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla\psi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2} \int\limits_{\Re\lambda = -\frac{1}{2}-\epsilon} \Big[& \nabla_T \mathfrak{M}(u)(\lambda, \Theta) \cdot \overline{\nabla_T \mathfrak{M}(\psi)(-1 - \bar{\lambda}, \Theta)} \\ & -(\lambda^2 + \lambda)\mathfrak{M}(u)(\lambda, \Theta) \, \overline{\mathfrak{M}(\psi)(-1 - \bar{\lambda}, \Theta)} \Big] d\Im\lambda d\Theta. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Rappelons que

$$\mathfrak{M}[u](\lambda, \Theta) = -v_\lambda(\Theta)\mathfrak{M}[q](\lambda) - w_\lambda(\lambda, \Theta), \tag{3.70}$$

où v_λ est la solution de (3.67) et a comme formulation variationnelle (voir Théorème 3.1.9),

$$\int_{S^2} \Big(\nabla_T v_\lambda \cdot \overline{\nabla_T \varphi} - (\lambda^2 + \lambda) v_\lambda \, \overline{\varphi} \Big) = -\overline{\varphi(B)}, \quad \forall \varphi \in H^1_{-\epsilon}(S^2; B), \tag{3.71}$$

et w_λ est la solution de (3.68) et a comme formulation variationnelle,

$$\int_{S^2}\Big(\nabla_T w_\lambda \cdot \overline{\nabla_T\varphi} - (\lambda^2+\lambda)w_\lambda\,\overline{\varphi}\Big)d\Theta = -\int\limits_{S^2}\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\Theta)\,\overline{\varphi(\Theta)}d\Theta, \quad \forall\varphi\in H^1(S^2).$$

Grâce à l'injection de $H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$ dans $H^1(S^2)$, on déduit que

$$\int_{S^2}\Big(\nabla_T w_\lambda \cdot \overline{\nabla_T\varphi} - (\lambda^2+\lambda)w_\lambda\,\overline{\varphi}\Big)d\Theta = -\int\limits_{S^2}\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\Theta)\overline{\varphi(\Theta)}d\Theta, \quad \forall\varphi\in H^1_{-\epsilon}(S^2;B). \tag{3.72}$$

En rappelant (3.70), cette identité et (3.71) donnent, pour tout $\varphi\in H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^2}\Big(\nabla_T\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T\varphi(\Theta)} &-(\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)\overline{\varphi(\Theta)}\Big)d\Theta\\ &= \mathfrak{M}[q](\lambda)\overline{\varphi(B)} + \int\limits_{S^2}\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\Theta)\overline{\varphi(\Theta)}d\Theta.\end{aligned}$$

Rappelons que par le Théorème 1.3.7, pour tout $\psi\in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, sa transformée de Mellin existe et appartient à $H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$. Donc cette dernière identité avec (3.69) permettent de conclure que, pour tout $\psi\in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\nabla\bar{\psi} = \frac{1}{2\pi}\Bigg(&\int\limits_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}\mathfrak{M}[q]\,(\lambda)\overline{\mathfrak{M}[\psi](-1-\bar{\lambda},B)}d\Im\lambda\\ &+\int\limits_{\Re\lambda=-\frac12-\epsilon}\int\limits_{S^2}\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\Theta)\overline{\mathfrak{M}[\psi](-1-\bar{\lambda},\Theta)}d\Theta d\Im\lambda\Bigg).\end{aligned}$$

En appliquant l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (le Corollaire 1.3.6) et en utilisant le Corollaire 1.4.4 et le Lemme 1.1.2, on obtient pour tout $\psi\in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\overline{\nabla\psi} = \int\limits_0^\infty q(\rho)\overline{\psi(\rho,B)}d\rho + \int\limits_0^\infty\int\limits_{S^2}h(\rho,\Theta)\overline{\psi(\rho,\Theta)}\rho^2d\rho d\Theta,$$

ce qui prouve que (3.66) a lieu.

Étape 2 : Unicité.
Supposons que (3.66) admet deux solutions dans $V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3;\sigma)$, alors leur différence d appartient à $V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3;\sigma)$ et satisfait

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla d\cdot\overline{\nabla\psi}=0, \quad \forall\psi\in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma).$$

Comme $d\in V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3,\sigma)$, alors sa transformée de Mellin $\mathfrak{M}[d](\lambda,\cdot)\in V^1_\epsilon(S^2;B)$ est définie sur la droite $\Re\lambda=-\epsilon-\frac12$. De plus $\psi\in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, donc par le Lemme 1.4.2, sa trans-

formée de Mellin $\mathfrak{M}[\psi](\mu,\cdot) \in H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$ est définie sur la droite $\Re\mu = \epsilon - \frac{1}{2}$ (ou encore $\mathfrak{M}[\psi](-1-\bar{\lambda},\cdot)$ est définie sur la droite $\Re\lambda = -\epsilon - \frac{1}{2}$).
Donc par le Lemme 1.4.6, on déduit que pour tout $\psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Re\lambda=-\epsilon-\frac{1}{2}} \int\limits_{S^2} \Big[\nabla_T\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T\mathfrak{M}[\psi](-1-\bar{\lambda},\Theta)} \\ -(\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\overline{\mathfrak{M}[\psi](-1-\bar{\lambda},\Theta)}\Big]d\Theta d\Im\lambda = 0.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Rappelons que par la Remarque 3.1.11, pour tout $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$ fixé, le problème

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^2} \Big[\nabla_T v(\Theta)\overline{\nabla_T w(\Theta)} - (\lambda^2+\lambda)v(\Theta)\overline{w(\Theta)}\Big]d\Theta \\ = \overline{w(B)}\mathfrak{M}[q](\lambda) + \int\limits_{S^2} \mathfrak{M}[h](\lambda-2,\Theta)\overline{w(\Theta)}d\Theta, \quad \forall\varphi \in H^1_{-\epsilon}(S^2;B),\end{aligned} \tag{3.74}$$

admet une unique solution dans $V^1_\epsilon(S^2;B) = H^1_\epsilon(S^2;B)$. Donc, pour avoir l'unicité de la solution de (3.66), il suffit de montrer que pour tout $w \in H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$ et pour $\lambda = -\epsilon - \frac{1}{2} + i\xi$ fixé avec $\epsilon \in (0,\frac{1}{2})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int\limits_{S^2} \Big[\nabla_T\mathfrak{M}[d](\lambda_0,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T w(\Theta)} - (\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\overline{w(\Theta)}\Big]d\Theta = 0. \tag{3.75}$$

Montrons donc que (3.73) implique (3.75) pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.
Soient $w \in H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$, $\varphi \in V^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^+;0)$ et définissons $\psi(\rho,\Theta) := w(\Theta)\varphi(\rho)$. Vérifions que $\psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$.
Observons que r_B, la distance à B dans S^2, satisfait $r_B \sim \frac{r_\sigma}{\rho}$. Donc en notant $\nabla_T w$ la composante tangentielle du gradient, i.e., $\nabla = \frac{1}{\rho}\nabla_T + \Theta\partial_\rho$, avec $\Theta = \frac{x}{|x|}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big[|r_\sigma^{-\epsilon}\,\rho^{-1}\psi|^2 + |r_\sigma^{-\epsilon}\nabla\psi|^2\Big] \\ &\sim \int\limits_{S^2} |r_B^{-\epsilon}w(\Theta)|^2 d\Theta \int\limits_0^\infty |\rho^{-1-\epsilon}\varphi(\rho)|^2\rho^2 d\rho + \int\limits_{S^2} |r_B^{-\epsilon}\nabla_T w(\Theta)|^2 d\Theta \int\limits_0^\infty |\rho^{-1-\epsilon}\varphi(\rho)|^2\rho^2 d\rho \\ &\quad + \int\limits_{S^2} |r_B^{-\epsilon}w(\Theta)|^2 d\Theta \int\limits_0^\infty |\rho^{-\epsilon}\partial_\rho\varphi(\rho)|^2 d\rho < \infty,\end{aligned}$$

comme $w \in H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$ et $\varphi \in V^1_{1-\epsilon}(\mathbb{R}^+;0)$.
Alors, on peut prendre ψ comme une fonction test dans (3.73), et on obtient pour tout $\varphi \in V^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^+;0)$,

$$\int\limits_{\Re\lambda=\epsilon-\frac{1}{2}} \int_{S^2} \Big[\nabla_T\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T w(\Theta)} - (\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\,\overline{w(\Theta)}\Big]d\Theta\;\overline{\mathfrak{M}[\varphi](-1-\bar{\lambda})}d\Im\lambda = 0. \tag{3.76}$$

Rappelons que par le Théorème 1.3.3 (voir la Remarque 1.3.4), on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{V^1_{1-\epsilon}(\mathbb{R}_0^+;0)} &\sim \int\limits_{\Re\mu=\epsilon-\frac{1}{2}} (1+|\mu|^2)|\mathfrak{M}[\varphi](\mu)|^2 d\Im\mu \\
&= \int\limits_{\Re\lambda=-\epsilon-\frac{1}{2}} (1+|-1-\bar{\lambda}|^2)|\mathfrak{M}[\varphi](-1-\bar{\lambda})|^2 d\Im\lambda \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi|^2)|\mathfrak{M}[\varphi](\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

et donc l'application $\varphi \mapsto G$ où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$G(\xi) = \sqrt{(1+|\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi|^2)}\,\mathfrak{M}[\varphi](\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi),$$

est un isomorphisme entre $V^1_{1-\epsilon}(\mathbb{R}_0^+;0)$ et $L^2(\mathbb{R})$.

Notons maintenant $\eta = -\epsilon - \frac{1}{2}$ et montrons que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{(1+|\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi|^2)}} \int_{S^2} \Big[\nabla_T \mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T w(\Theta)} \\
&\qquad -((\eta+i\xi)^2+\eta+i\xi)\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\Theta)\overline{w(\Theta)}\Big] d\Theta,
\end{aligned}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

En effet, d'une part comme $d \in V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3;\sigma)$, on sait par le Théorème 1.3.7 que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{V^1_\epsilon(S^2;B)} + |\eta+i\xi|^2 \|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{L^2_\epsilon(S^2;B)} \right) d\xi < \infty. \tag{3.77}$$

D'autre part, en rappelant que, par la Proposition 1.1.15, on a $V^1_\epsilon(S^2;B) = H^1_\epsilon(S^2;B)$, et en utilisant les inégalités

$$\frac{1}{1+|\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi|^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{|(\eta+i\xi)^2+\eta+i\xi|^2}{1+|\epsilon-\frac{1}{2}+i\xi|^2} \leq |\eta+i\xi|^2,$$

en plus de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|F(\xi)|^2 &\lesssim \|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{H^1_\epsilon(S^2;B)} \|w\|^2_{H^1_{-\epsilon}(S^2;B)} \\
&\quad + |\eta+i\xi|^2 \|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{L^2_\epsilon(S^2;B)} \|w\|^2_{L^2_{-\epsilon}(S^2;B)} \\
&\lesssim \|w\|^2_{H^1_{-\epsilon}(S^2;B)} \left(\|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{V^1_\epsilon(S^2;B)} + |\eta+i\xi|^2 \|\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)\|^2_{L^2_\epsilon(S^2;B)} \right).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $F \in L^2(\mathbb{R})$ en utilisant (3.77). Comme (3.76) signifie que F est orthogonale à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, on déduit que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $F(\xi) = 0$

i.e.
$$\int_{S^2}\Big[\nabla_T\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\cdot\overline{\nabla_T w(\Theta)}-(\lambda^2+\lambda)\mathfrak{M}[d](\lambda,\Theta)\,\overline{w(\Theta)}\Big]d\Theta=0.$$
Par l'unicité de la solution de ce problème, on déduit que pour presque tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{M}[d](\eta+i\xi,\cdot)=0$ et donc $d=0$. Le problème (3.66) admet ainsi une unique solution $u\in V^1_\epsilon(\mathbb{R}^3;\sigma)$.

Étape 3 : Régularité et estimations.

Par le Lemme 1.3.7, prouver que $u\in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ est équivalent à montrer que

$$\int\limits_{\Re\lambda=m-\alpha-\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{m}|\lambda|^{2l}\Big\|\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\Big\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}d\Im\lambda<\infty. \tag{3.78}$$

Rappelons que $\mathfrak{M}[u](\lambda,\Theta)=-v_\lambda(\Theta)\mathfrak{M}[q](\lambda)-w_\lambda(\Theta)$. Comme $v_\lambda\in V^m_\alpha(S^2;B)$ pour tout $\alpha>m-1$ et satisfait par le Théorème 3.1.9,

$$\sum_{l=0}^{m}|\lambda|^{2l}\|v_\lambda\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}\lesssim 1,$$

ainsi que $w_\lambda\in V^m_\alpha(S^2;B)$ et satisfait par le Théorème 3.1.5,

$$\sum_{l=0}^{m}|\lambda|^{2l}\|w_\lambda\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}\lesssim\sum_{l=0}^{m-2}|\lambda|^{2l}\|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{V^{m-2-l}_\alpha(S^2;B)}+\|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{0,S^2}.$$

On déduit que $\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\in V^m_\alpha(S^2;B)$ et satisfait,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m}|\lambda|^{2l}\|\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}\ &\lesssim\ |\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2+\sum_{l=0}^{m-2}|\lambda|^{2l}\|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{V^{m-2-l}_\alpha(S^2;B)}\\&\quad+\|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{0,S^2}.\end{aligned}$$

En intégrant cette dernière sur la droite $\Re\lambda=m-\alpha-\frac{3}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Re\lambda=m-\alpha-\frac{3}{2}}\sum_{l=0}^{m}|\lambda|^{2l}\|\mathfrak{M}[u](\lambda,\cdot)\|^2_{V^{m-l}_\alpha(S^2;B)}d\Im\lambda\lesssim&\int\limits_{\Re\lambda=m-\alpha-\frac{3}{2}}\Big[|\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2\\&+\sum_{l=0}^{m-2}|\lambda|^{2l}\|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot))\|^2_{V^{m-2-l}_\alpha(S^2;B)}+\|M[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{0,S^2}\Big]d\Im\lambda.\end{aligned}$$

Comme $|\lambda|^{2l}\lesssim|\lambda-2|^{2l}$, et comme $\alpha>m-1$, on a par la Proposition 1.1.8, pour tout $l\in\{0,\dots,m-2\}$, $H^{m-2-l}(S^2)\hookrightarrow H^{m-2-l}_\alpha(S^2;B)=V^{m-2-l}_\alpha(S^2;B)$, et on conclut donc que

$$\|u\|^2_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \int\limits_{\Re\lambda = m-\alpha-\frac{3}{2}} \Bigg(|\mathfrak{M}[q](\lambda)|^2 + \sum_{l=0}^{m-2} |\lambda-2|^{2l} \|\mathfrak{M}[h](\lambda-2,\cdot))\|^2_{m-2-l,S^2}$$
$$+ \|M[h](\lambda-2,\cdot)\|^2_{0,S^2} \Bigg) d\Im\lambda.$$

Le Lemme 1.3.3 permet de déduire que $u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma)} \lesssim \|q\|_{L^2_{\alpha-m+1}(\mathbb{R}^+;0)} + \|h\|_{V^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}^3;0)} + \|h\|_{V^0_{\alpha-m+2}(\mathbb{R}^3;0)},$$

ce qui achève la preuve comme $\|h\|_{V^0_{\alpha-m+2}(\mathbb{R}^3;0)} \lesssim \|h\|_{V^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}^3;0)}$. ∎

Remarque 3.2.3. *Notons que la trace des fonctions $\psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$ est bien définie et appartient à $L^2_{-\epsilon}(0,\infty)$, ce qui donne un sens à* (3.66). *En effet, soit $\psi \in M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$ donc par le Lemme 1.4.2, sa transformée de Mellin $\mathfrak{M}[\psi](\mu)$ est dans $H^1_{-\epsilon}(S^2;B)$ et est définie sur $\Re\mu = \epsilon - \frac{1}{2}$, alors par le Théorème 4.2 de [16], sa trace au point B est bien définie et on a*

$$|\mathfrak{M}[\psi](\mu,B)| \leq c\|\mathfrak{M}[\psi](\mu,\cdot)\|_{H^1_{-\epsilon}(S^2;B)},$$

avec c une constante positive qui ne dépend pas de μ.
En intégrant alors sur $\Re\mu = \epsilon - \frac{1}{2}$ et en utilisant le Lemme 1.4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Re\mu=\epsilon-\frac{1}{2}} |\mathfrak{M}[\psi](\mu,B)|^2 d\Im\mu &\leq c \int\limits_{\Re\mu=\epsilon-\frac{1}{2}} \|\mathfrak{M}[\psi](\mu,\cdot)\|^2_{H^1_{-\epsilon}(S^2;B)} d\Im\mu \\ &\leq c\|\psi\|^2_{M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)}. \end{aligned}$$

Or par l'égalité de Parseval pour la transformée de Mellin (Corollaire 1.3.6), on a

$$\|\psi(\cdot,B)\|^2_{L^2_{-\epsilon}(\sigma)} \simeq \int\limits_{\Re\mu=\epsilon-\frac{1}{2}} |\mathfrak{M}[\psi](\mu,B)|^2 d\Im\mu,$$

on en déduit donc que

$$\|\gamma_\sigma\psi\|_{L^2_{-\epsilon}(\sigma)} \leq c\|\psi\|_{M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)},$$

avec γ_σ l'opérateur trace de $M^1_{-\epsilon}(\mathbb{R}^3;\sigma)$ dans $L^2_{-\epsilon}(\sigma)$.

3.3 L'équation de Laplace sur un domaine tridimensionnel avec une fracture finie

On termine ce chapitre par un problème posé dans des domaine bornés $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$ à frontières lipschitziennes, mais avec une fracture σ qui représente un segment strictement inclus dans $\mathcal{O}$, c-à-d. $\bar{\sigma} \subset \mathcal{O}$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$\sigma = \{(x, 0, 0) \mid 0 < x < 1\}. \tag{3.79}$$

Dans telle configuration, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = q\delta_\sigma, & \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \quad u = 0, & \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{3.80}$$

avec $q \in L^2(\sigma)$.

Selon [15, Corollaire 2.2], on a le résultat suivant.

Lemme 3.3.1. *Soient $\sigma = \{(x, 0, 0) \mid 0 < x < 1\}$ et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné à frontière lipschitzienne et tel que $\bar{\sigma} \subset \mathcal{O}$. Pour chaque fonction $q \in L^2(\sigma)$, le problème* (3.80) *admet une unique solution u dans $\bigcap_{\alpha>0} \mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O}; \sigma)$, dans le sens qu'elle est l'unique fonction dans $\bigcap_{\alpha>0} \mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O}; \sigma)$ qui satisfait*

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla v = \int_0^1 q(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \bigcup_{\alpha>0} \mathring{H}^1_{-\alpha}(\mathcal{O}; \sigma). \tag{3.81}$$

De plus, pour tout $\alpha > 0$, u satisfait l'estimation

$$\|u\|_{H^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{3.82}$$

Remarque 3.3.2. *Dans le second membre de* (3.81)*, v désigne $\gamma_\sigma v$ où γ_σ est l'opérateur trace de $H^1_{-\alpha}(\mathcal{O}; \sigma)$ dans $L^2(\sigma)$, qui est bien défini selon [16, Théorème 4.2]).*

Preuve : La partie d'existence peut être trouvée dans [15, Corollaire 2.2], tandis que l'estimation (3.82) est une conséquence de [15, Remarque 1]. ∎

On montre d'abord que cette solution est régulière loin de σ.

Lemme 3.3.3. *Supposons que la frontière de $\mathcal{O}$ est de classe $\mathcal{C}^m$ avec $m \geq 2$. Soit $u \in \bigcap_{\alpha>0} \mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O}; \sigma)$ la solution du problème* (3.80) *donnée par le Lemme 3.3.1. Alors pour tout voisinage V de σ, on a $u \in H^m(\mathcal{O} \backslash V)$ avec*

$$\|u\|_{m,\mathcal{O}\backslash V} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Preuve : On montre le résultat par récurrence sur ℓ pour $2 \leq \ell \leq m$.
Étape 1 : $\ell = 2$. Fixons $\alpha > 0$ et soit $\eta_1 \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{O}})$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \eta_1 = 0 & \text{sur} \quad V_1 \\ \eta_1 = 1 & \text{sur} \quad \mathcal{O}\backslash V_1', \end{cases}$$

avec $V_1 \subset V_1'$ deux voisinages de σ. Posons $w_1 = \eta_1 u$.
Rappelons que la solution u de (3.80) est dans $\mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)$. On peut vérifier facilement que $w_1 \in \mathring{H}^1(\mathcal{O})$ avec

$$\|w_1\|_{1,\mathcal{O}} \lesssim \|u\|_{1,\mathcal{O}\setminus V_1} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)}.$$

Pour tout $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{O})$, on utilise la formule de Leibniz et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} \nabla w_1 \cdot \nabla v &= \int_{\mathcal{O}} \nabla(\eta_1 u) \cdot \nabla v \\
&= \int_{\mathcal{O}} u \nabla \eta_1 \cdot \nabla v + \int_{\mathcal{O}} \eta_1 \nabla u \cdot \nabla v \\
&= \int_{\mathcal{O}} u \nabla \eta_1 \cdot \nabla v + \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla(\eta_1 v) - \int_{\mathcal{O}} v \nabla u \cdot \nabla \eta_1.
\end{aligned}$$

Comme $\eta_1 v \in \mathring{H}^1_{-\alpha}(\mathcal{O};\sigma)$, par (3.81), on a

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla(\eta_1 v) = \int_{\sigma} q\, \eta_1\, v = 0,$$

ce qui permet de déduire que,

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla w_1 \cdot \nabla v = \int_{\mathcal{O}} u \nabla \eta_1 \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{O}} v \nabla u \cdot \nabla \eta_1.$$

En appliquant la formule de Green dans le premier terme du membre à droite, on obtient pour tout $v \in \mathring{H}^1(\mathcal{O})$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}} \nabla w_1 \cdot \nabla v &= -\int_{\mathcal{O}} v \operatorname{div}(u \nabla \eta_1) - \int_{\mathcal{O}} v \nabla u \cdot \nabla \eta_1 \\
&= \int_{\mathcal{O}} (-\Delta \eta_1 u - 2 \nabla \eta_1 \cdot \nabla u) v.
\end{aligned}$$

Ceci signifie que $w_1 \in \mathring{H}^1(\mathcal{O})$ est la solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w_1 = 2 \nabla \eta_1 \cdot \nabla u + u \Delta \eta_1 := h_1 & \text{dans} \quad \mathcal{O} \\ w_1 = 0 & \text{sur} \quad \partial \mathcal{O}, \end{cases}$$

avec $h_1 \in L^2(\mathcal{O})$. On conclut donc par application de [10, Théorème 9.25, p. 298], que $w_1 \in H^2(\mathcal{O})$ et satisfait

$$\|w_1\|_{2,\mathcal{O}} \lesssim \|h_1\|_{0,\mathcal{O}}.$$

Ce qui implique que $u \in H^2(\mathcal{O}\setminus V_1')$ avec

$$\|u\|_{2,\mathcal{O}\setminus V_1'} \lesssim \|u\|_{H^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)}.$$

Par (3.82), l'assertion est vraie pour $\ell = 2$.

Étape 2 : Supposons maintenant que pour $\ell \in \{3, \dots, m\}$, $u \in H^{\ell-1}(\mathcal{O}\backslash V_\ell)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{\ell-1,\mathcal{O}\backslash V_\ell} \lesssim \|q\|_{0,\sigma},$$

où V_ℓ est un voisinage de σ qui contient V_1. Et montrons que $u \in H^\ell(\mathcal{O}\backslash V'_\ell)$ et satisfait l'estimation

$$\|u\|_{\ell,\mathcal{O}\backslash V'_\ell} \lesssim \|q\|_{0,\sigma},$$

avec V'_ℓ un voisinage de σ qui contient V_ℓ.
Soit $\eta_\ell \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \eta_\ell = 0 & \text{sur} \quad V_\ell \\ \eta_\ell = 1 & \text{sur} \quad \mathcal{O}\backslash V'_\ell. \end{cases}$$

Posons $w_\ell = \eta_\ell u$ alors comme précédemment, on obtient que $w_\ell \in \mathring{H}^1(\mathcal{O})$ est la solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w_\ell = 2\nabla\eta_\ell \cdot \nabla u + \Delta\eta_\ell u := h_\ell & \text{dans} \quad \mathcal{O} \\ \qquad w_\ell = 0 & \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

De plus, par hypothèse, on a $u \in H^{\ell-1}(\mathcal{O}\backslash V_\ell)$ et donc par définition de h_ℓ on déduit que $h_\ell \in H^{\ell-2}(\mathcal{O})$.
On en conclut, grâce à [10, Théorème 9.25, p. 298], que $w_\ell \in H^\ell(\mathcal{O})$, ainsi $u \in H^\ell(\mathcal{O}\backslash V'_\ell)$ avec

$$\|u\|_{\ell,\mathcal{O}\backslash V'_\ell} \leq \|w_\ell\|_{\ell,\mathcal{O}} \lesssim \|h_\ell\|_{\ell-2,\mathcal{O}} \lesssim \|u\|_{\ell-1,\mathcal{O}\backslash V_\ell} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

■

Théorème 3.3.4. *Soient $m \geq 2$ et $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière de classe C^m, et tel que $\bar{\sigma} \subset \mathcal{O}$ avec $\sigma = \{(x,0,0) \mid 0 < x < 1\}$. Soit $q \in L^2(\sigma)$ et soit $u \in \bigcap_{\alpha>0} \mathring{H}^1_\alpha(\mathcal{O};\sigma)$, la solution de (3.80). Alors $u \in \bigcap_{\alpha>m-1} V^m_\alpha(\mathcal{O};\sigma)$, et pour tout $\alpha > m-1$ on a l'estimation*

$$\|u\|_{V^m_\alpha(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Preuve :
Fixons une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{O}})$ telle que $\eta = 1$ dans un voisinage de σ. Comme dans le Lemme 3.3.3, on prouve que $\eta u \in \bigcap_{\alpha>0} H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma)$ est la solution faible de

$$-\Delta(\eta u) = \eta q \delta_\sigma + h, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

avec $h := -2\nabla u \cdot \nabla\eta - u\Delta\eta$, dans le sens qu'elle est l'unique élément de $\bigcap_{\alpha>0} H^1_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma)$

qui vérifie

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla(\eta u)(x,y,z)\cdot\overline{\nabla v(x,y,z)}\,dxdydz &= \int\limits_{\sigma} \eta\, q(x)\,\overline{v(x,0,0)}\,dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} h(x,y,z)\,\overline{v(x,y,z)}\,dxdydz, \quad \forall v\in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma).\end{aligned} \tag{3.83}$$

En effet, pour $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ soit $v \in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma)$, donc on vérifie facilement que $\eta v \in \mathring{H}^1_{-\alpha}(\mathcal{O};\sigma)$ et que $\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(\eta u)\cdot\overline{\nabla v}$ est bien définie. Des applications successives de la formule de Leibniz et de la formule de Green, permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\eta u\cdot\overline{\nabla v} &= \int_{\mathbb{R}^3} u\nabla\eta\cdot\overline{\nabla v} + \int_{\mathbb{R}^3}\eta\nabla u\cdot\overline{\nabla v}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\bar v\,\mathrm{div}\big(u\nabla\eta\big) + \int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\overline{\nabla(\eta v)} - \int_{\mathbb{R}^3}\bar v\nabla u\cdot\nabla\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\overline{\nabla(\eta v)} - \int_{\mathbb{R}^3}\bar v\Big(\mathrm{div}(u\nabla\eta)+\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\\ &= \int_{\mathcal{O}}\nabla u\cdot\overline{\nabla(\eta v)} - \int_{\mathbb{R}^3}\bar v(2\nabla\eta\cdot\nabla u+\Delta\eta u).\end{aligned}$$

Comme $\eta v\in H^1_{-\epsilon}(\mathcal{O};\sigma)$, on a par (3.81),

$$\int_{\mathcal{O}}\nabla u\cdot\overline{\nabla(\eta v)} = \int_\sigma q\,\eta\,\bar v.$$

Notons que la différence avec (3.65) vient du fait que σ ici est un segment et pas une demi droite. Pour résoudre ce problème, on va utiliser une méthode d'extension. Notamment posons

$$\sigma_+ = \{(x,0,0)\mid x>0\} \quad \text{et} \quad \sigma_- = \{(x,0,0)\mid x<1\}.$$

Observons que $r_{\sigma_\pm}\le r_\sigma$, et donc on obtient directement que $\eta u\in\bigcap\limits_{\alpha>0} H^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma_\pm)$. Sans perdre de généralité, on étudie seulement le cas où σ est prolongé à σ_+ (le cas où σ est prolongé à σ_- se déduit par un changement de variable $x_1=1-x$).
Alors par la Proposition 1.1.14, on déduit que $\eta u\in\bigcap\limits_{\alpha>0} V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma_+)$.
Soit $\tilde q$ l'extension de q par zéro à l'extérieur de σ, alors $\eta u\in V^1_\alpha(\mathbb{R}^3;\sigma_+)$ peut être considérée comme la solution de

$$-\Delta(\eta u) = \tilde q\,\delta_{\sigma_+} - 2\nabla u\cdot\nabla\eta - u\Delta\eta, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

c-à-d.

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(\eta u)\cdot\overline{\nabla v}\,dxdydz = \int_{\sigma_+}\tilde q(x)\overline{v(x,0,0)}\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} h\,\bar v\,dxdydz, \quad \forall v\in M^1_{-\alpha}(\mathbb{R}^3;\sigma_+).$$

A cette étape, on remarque que grâce au Lemme 3.3.3, $h := -2\nabla\eta\cdot\nabla u - u\Delta\eta \in$

$H^{m-1}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $m \geq 1$, et comme h est nulle au voisinage de σ et en dehors de $\mathcal{O}$,

$$h \in \bigcap_{\alpha>0} V^0_{1+\alpha}(\mathbb{R}^3; 0) \quad \text{et} \quad h \in \bigcap_{\alpha>0} V^{m-2}_{\alpha}(\mathbb{R}^3; 0).$$

Comme, pour tout $\alpha > m-1$, $\tilde{q} \in L^2_{\alpha-m+1}(\mathbb{R}^+; 0)$, une application directe du Théorème 3.2.1 permet de déduire que $\eta u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma_+)$ et pour $\alpha > m-1$, l'estimation

$$\|\eta u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma_+)} \lesssim \|\tilde{q}\|_{L^2_{\alpha-m+1}(\mathbb{R}^+;0)} + \|h\|_{V^{m-2}_\alpha(\mathbb{R}^3;0)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{3.84}$$

De façon similaire, à l'aide d'un changement de variable $x_1 = 1 - x$, on montre que $\eta u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma_-)$ avec

$$\|\eta u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma_-)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{3.85}$$

Vérifions maintenant que si $\eta u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma_+) \cap V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma_-)$ alors $\eta u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma)$. Posons

$$\mathbb{R}^3 := D_1 \cup S \cup D_2,$$

avec $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $D_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}$ et $D_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1\}$.
Remarquons que sur S, $r_\sigma = r_{\sigma_+}$ et alors $\eta u \in V^m_\alpha(S; \sigma)$. De même sur D_1 (resp. D_2), $r_\sigma = r_{\sigma_+}$ et alors $\eta u \in V^m_\alpha(D_1; \sigma)$ (resp. $r_\sigma = r_{\sigma_-}$ et alors $\eta u \in V^m_\alpha(D_2; \sigma)$). On conclut donc que $\eta u \in V^m_\alpha(\mathbb{R}^3, \sigma)$. De plus, grâce aux inégalités (3.84) et (3.85), on a

$$\begin{aligned}
\|\eta u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma)} &= \|\eta u\|_{V^m_\alpha(S,\sigma)} + \|\eta u\|_{V^m_\alpha(D_1,\sigma)} + \|\eta u\|_{V^m_\alpha(D_2,\sigma)} \\
&= \|\eta u\|_{V^m_\alpha(S,\sigma_+)} + \|w\|_{V^m_\alpha(D_1,\sigma_+)} + \|\eta u\|_{V^m_\alpha(D_2,\sigma_-)} \\
&\leq \|\eta u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma_+)} + \|\eta u\|_{V^m_\alpha(\mathbb{R}^3,\sigma_-)} \\
&\lesssim \|q\|_{0,\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

D'autre part, grâce au Lemme 3.3.3, on a $(1 - \eta)u \in H^m(\mathcal{O})$ et comme elle est nulle dans un voisinage de σ, on obtient

$$\|(1 - \eta)u\|_{V^m_\alpha(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Cette dernière avec (3.86) concluent la preuve. ∎

Chapitre 4

Problèmes elliptiques avec une fracture courbe

Sommaire

SOIENT $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, soit σ une fracture courbe unidimensionnelle de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ et strictement incluse dans $\mathcal{O}$.
L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème suivant : étant donné $q \in L^2(\sigma)$, on cherche à étudier la régularité de la solution u du problème

$$\begin{cases} -\Delta u & = q\delta_\sigma, \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}, \\ \quad u & = 0, \quad\quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.1}$$

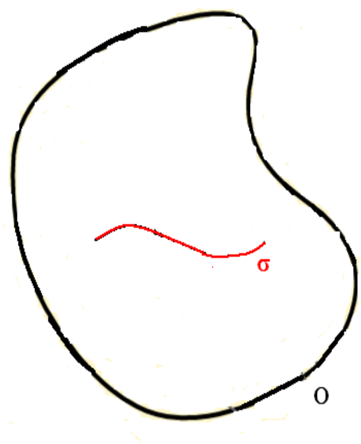

FIGURE 4.1 – Un domaine tridimensionnel $\mathcal{O}$ avec une fracture unidimensionnelle σ.

Selon le Corollaire 2.2 de [15], ce problème a une solution faible u dans $\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$ avec $0<\beta<1$, i.e. u est l'unique fonction dans $\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$ vérifiant

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla u\cdot\nabla v = \int_\sigma q\gamma_\sigma v, \quad \forall v\in \mathring{H}^1_{-\beta}(\mathcal{O};\sigma). \tag{4.2}$$

De plus, on a

$$\|u\|_{\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{4.3}$$

Le but de ce chapitre est donc, de montrer une régularité améliorée de cette solution, c-à-d. de montrer que pour tout $m\geq 1$, $u\in V^m_{\beta+m-1}(\mathcal{O};\sigma)$ avec toujours $0<\beta<1$.

4.1 Régularité locale à l'intérieur de la fracture σ

Le but de cette section est de montrer la régularité locale de la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'une fracture unidimensionnelle σ, qui représente dans ce cas, une courbe régulière strictement incluse dans un domaine tridimensionnel $\mathcal{O}$ borné et à frontière suffisamment régulière.
C'est-à-dire qu'on va montrer la régularité de la solution du problème de Dirichlet (4.1) au voisinage d'un point $x_0\in\sigma$ intérieur à σ.

Pour démontrer le résultat principal de cette section, on a besoin de certains résultats fondamentaux dont les démonstrations sont données, la démonstration du Théorème 4.1.4 est inspirée du Théorème 5.1 de [14] en plus du Lemme 7.4.3 de [11], où les auteurs ont prouvé dans le premier la régularité de la solution des problèmes aux limites sur des dièdres mais dans le cas d'un opérateur elliptique à coefficients constants. Dans le deuxième, les auteurs ont prouvé un théorème de shift dans les espaces de Sobolev avec poids mais cette fois dans le cas d'un opérateur différentiel à coefficients variables réguliers et sur des cônes tronqués.

On commence cette section avec un lemme technique fondamental pour l'argument de perturbation qui va nous permettre d'obtenir des estimations a priori pour des problèmes elliptiques dans des dièdres.

Lemme 4.1.1. *Soient K un cone de $\mathbb{R}^2$ et $\hat{x}=(\hat{x}_\perp,\hat{x}_3)$ avec $\hat{x}_\perp\in\mathbb{R}^2$ et $\hat{x}_3\in\mathbb{R}$, les coordonnées cartésiennes associées au produit $K\times\mathbb{R}$. Soit L un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ défini sur $K\times\mathbb{R}$. Pour tout nombre positif j et tout $|\nu|<2^{j+1}$, soit $L^{j,\nu}$ l'opérateur défini par*

$$L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}}) = 2^{-2j}L\Big(2^{-j}(\hat{x}+(0,0,\frac{\nu}{2})),2^j\partial_{\hat{x}}\Big).$$

Soient encore L_{pp} la partie principale de L gelée en $(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2})$ et

$$L_{pp}^{j,\nu} := 2^{-2j} L_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), 2^j\partial_{\hat{x}}\Big) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2})\partial_{\hat{x}}^\alpha.$$

Soient $m \in \mathbb{N}$ et A_ϵ l'ensemble donné par

$$A_\epsilon := \{\hat{x}_\perp \in K \mid \frac{1}{4} - \epsilon < |\hat{x}_\perp| < 1+\epsilon\} \times (-\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon), \tag{4.4}$$

alors pour tout $u \in H^{m+2}(A_\epsilon)$, on a

$$\|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{m,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{m+2,A_\epsilon}. \tag{4.5}$$

Remarque 4.1.2. *Notons que la constante obtenue dans* (4.5) *est indépendante de $j > 0$ et $|\nu| < 2^{j+1}$.*

Preuve : Par définition, on a $(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u = L_1 u + L_2 u$, où

$$L_1 u := \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})\frac{\partial^\alpha u}{\partial \hat{x}^\alpha} \quad \text{avec} \quad b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x}) = a_\alpha(2^{-j}(\hat{x} + (0,0,\frac{\nu}{2}))) - a_\alpha(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),$$

et

$$L_2 u := \sum_{|\alpha|\le 1} 2^{j(|\alpha|-2)} a_\alpha\Big(2^{-j}(\hat{x} + (0,0,\frac{\nu}{2}))\Big)\frac{\partial^\alpha u}{\partial \hat{x}^\alpha}.$$

Par itération sur ℓ, on prouve que pour tout $u \in H^{\ell+2}(A_\epsilon)$ avec $0 \le \ell \le m$, on a

$$\|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{\ell,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{\ell+2,A_\epsilon}. \tag{4.6}$$

Pour $\ell = 0$, on a

$$\begin{aligned} \|L_1 u\|_{0,A_\epsilon} &\le \sum_{|\alpha|=2} \sup_{\hat{x}\in A_\epsilon} |b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})| \|\frac{\partial^\alpha u}{\partial \hat{x}^\alpha}\|_{0,A_\epsilon} \\ &\le \sup_{\hat{x}\in A_\epsilon} |b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})| \|u\|_{2,A_\epsilon}. \end{aligned}$$

Notons par $B_\epsilon := 2^{-j}\Big(A_\epsilon + (0,0,\frac{\nu}{2})\Big)$. Cet ensemble est borné indépendamment de j et ν grâce aux conditions $j \ge 1$ et $|\nu| < 2^{j+1}$. Comme a_α est continûment dérivable et sa dérivée première est continue sur $\overline{B}_\epsilon$, on en déduit que $b_\alpha^{j,\nu}$ est lipschitzienne grâce à l'inégalité des accroissements finis, et on a

$$\begin{aligned} |b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})| &\leq \sup_{x\in B_\epsilon} |\nabla a_\alpha(x)|\; |2^{-j}\hat{x} + (0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}) - (0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2})| \\ &\lesssim 2^{-j}|\hat{x}|. \end{aligned}$$

Comme $\hat{x} \in A_\epsilon$ qui est borné, on conclut que

$$|b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})| \lesssim 2^{-j}. \tag{4.7}$$

Et donc,

$$\|L_1 u\|_{0,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{2,A_\epsilon}. \tag{4.8}$$

Estimons $\|L_2 u\|_{0,A_\epsilon}$. On a

$$\|L_2 u\|_{0,A_\epsilon} \leq \sum_{|\alpha|\leq 1} 2^{j(|\alpha|-2)} \sup_{\hat{x}\in A_\epsilon}\Big|a_\alpha(2^{-j}\hat{x} + (0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big|\; \Big\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial \hat{x}^\alpha}\Big\|_{0,A_\epsilon}.$$

Comme $|a_\alpha(2^{-j}\hat{x} + (0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))| \leq c$ (continu sur un compact borné indépendamment de j et ν), on obtient

$$\|L_2 u\|_{0,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{1,A_\epsilon}. \tag{4.9}$$

Par conséquent,

$$\|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{0,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{2,A_\epsilon}.$$

Soit $1 \leq \ell \leq m$. Supposons maintenant que (4.6) est vraie pour $\ell - 1$ et montrons que pour $u \in H^{\ell+2}(A_\epsilon)$ on a

$$\|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{\ell,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{\ell+2,A_\epsilon}.$$

Par définition de la norme dans $H^\ell(A_\epsilon)$, on a

$$\|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{\ell,A_\epsilon} = \|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u\|_{\ell-1,A_\epsilon} + |(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u|_{\ell,A_\epsilon}, \tag{4.10}$$

et il suffit d'estimer $|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u|_{\ell,A_\epsilon}$.

$$|(L^{j,\nu} - L_{pp}^{j,\nu})u|^2_{\ell,A_\epsilon} \lesssim \sum_{|\beta|=\ell}\Big(\|\partial^\beta(L_1 u)\|^2_{0,A_\epsilon} + \|\partial^\beta(L_2 u)\Big)\|^2_{0,A_\epsilon}\Big).$$

Par la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
\partial^\beta(L_1u) &= \sum_{|\alpha|=2}\partial^\beta\Big[b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})\frac{\partial^\alpha u}{\partial\hat{x}^\alpha}\Big]\\
&= \sum_{|\alpha|=2}\sum_{\gamma\leq\beta}C_\beta^\gamma\partial^{\beta-\gamma}\Big(b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})\Big)\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\\
&= \sum_{|\alpha|=2}b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}+\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\gamma<\beta}C_\beta^\gamma\partial^{\beta-\gamma}\Big(b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x})\Big)\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $|\beta|=\ell$, on a

$$\|\partial^\beta(L_1u)\|_{0,A_\epsilon}^2\lesssim\sum_{|\alpha|=2}\|b_\alpha^{j,\nu}\|_\infty^2\|\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}\|_{0,A_\epsilon}^2+\sum_{|\alpha|=2}\sum_{|\gamma|<|\beta|}\sup_{\hat{x}\in A_\epsilon}\Big|\partial^{\beta-\gamma}(b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x}))\Big|^2\|\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\|_{0,A_\epsilon}^2.$$

Comme précédemment, $\|b_\alpha^{j,\nu}\|_\infty\lesssim 2^{-j}$. De même, pour $|\beta-\gamma|\geq 1$, on a

$$\Big|\partial^{\beta-\gamma}(b_\alpha^{j,\nu}(\hat{x}))\Big|=2^{-j|\beta-\gamma|}\Big|\partial^{\beta-\gamma}a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big|.$$

Cette quantité est bornée par 2^{-j} comme $a_\alpha\in\mathcal{C}^\infty$ et $|\beta-\gamma|\geq 1$. Par conséquent

$$\sum_{|\beta|=\ell}\|\partial^\beta(L_1u)\|_{0,A_\epsilon}^2\ \lesssim\ 2^{-2j}\Bigg(\sum_{|\beta|+|\alpha|=\ell+2}\|\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}\|_{0,A_\epsilon}^2+\sum_{|\gamma|+|\alpha|<\ell+2}\|\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\|_{0,A_\epsilon}^2\Bigg),$$

et on en déduit que

$$\sum_{|\beta|=\ell}\|\partial^\beta(L_1u)\|_{0,A_\epsilon}\lesssim 2^{-j}\|u\|_{\ell+2,A_\epsilon}.$$

Revenons maintenant à L_2. De la même façon, on utilise la formule de Leibniz et on a

$$\begin{aligned}
\partial^\beta(L_2u) &= \sum_{|\alpha|\leq 1}2^{j(|\alpha|-2)}\partial^\beta\Big[a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\frac{\partial^\alpha u}{\partial\hat{x}^\alpha}\Big]\\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1}2^{j(|\alpha|-2)}\sum_{\gamma\leq\beta}C_\beta^\gamma\partial^{\beta-\gamma}\Big[a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big]\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\\
&= \sum_{|\alpha|\leq 1}2^{j(|\alpha|-2)}a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}\\
&\quad+\sum_{|\alpha|\leq 1}2^{j(|\alpha|-2)}\sum_{\gamma<\beta}C_\beta^\gamma\partial^{\beta-\gamma}\Big[a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big]\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout $|\beta| = \ell$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta(L_2 u)\|^2_{0,A_\epsilon} &\lesssim \sum_{|\alpha|\le 1} 2^{2j(|\alpha|-2)}\Big[\|a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\|^2_\infty \|\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}\|^2_{0,A_\epsilon} \\ &\quad + \sum_{|\gamma|<|\beta|} C^\gamma_\beta \sup_{\hat{x}\in A_\epsilon}\Big|\partial^{\beta-\gamma}\Big[a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big]\Big|^2 \|\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\|^2_{0,A_\epsilon}\Big].\end{aligned}$$

Pour $|\alpha| \le 1$, on a $2^{2j(|\alpha|-2)} \le 2^{-2j}$. De plus, comme $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B_\epsilon})$ et donc est borné, on obtient pour tout $|\beta-\gamma| \ge 1$,

$$\begin{aligned}|\partial^{\beta-\gamma}\Big[a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))\Big]| &= 2^{-j(|\beta-\gamma|)}|\partial^{\beta-\gamma}a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))| \\ &\le 2^{-j}|\partial^{\beta-\gamma}a_\alpha(2^{-j}\hat{x}+(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}))| \lesssim 2^{-j}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{|\beta|=\ell}\|\partial^\beta(L_2 u)\|^2_{0,A_\epsilon} &\lesssim 2^{-2j}\Bigg(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le\ell+1}\|\frac{\partial^{\beta+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\beta+\alpha}}\|^2_{0,A_\epsilon} + \sum_{|\alpha|+|\gamma|<\ell+1}\|\frac{\partial^{\gamma+\alpha}u}{\partial\hat{x}^{\gamma+\alpha}}\|^2_{0,A_\epsilon}\Bigg) \\ &\lesssim 2^{-2j}\|u\|^2_{\ell+1,A_\epsilon} \\ &\lesssim 2^{-2j}\|u\|^2_{\ell+2,A_\epsilon}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, pour $1 \le \ell \le m$, on a

$$\|(L^{j,\nu}-L^{j,\nu}_{pp})u\|_{\ell-1,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{\ell+1,A_\epsilon},$$

et on a prouvé que

$$|(L^{j,\nu}-L^{j,\nu}_{pp})u|_{\ell,A_\epsilon} \lesssim 2^{-j}\|u\|_{\ell+2,A_\epsilon}.$$

On en déduit par (4.10) que (4.6) est vraie pour ℓ. ∎

Un résultat aussi technique qui sera utile par la suite est le lemme suivant.

Lemme 4.1.3. *Soient $m \ge 2$ et A_ϵ l'ensemble donné par* (4.4). *Soit L un opérateur elliptique à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^m$ défini sur A_ϵ :*

$$L = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)\partial^\alpha.$$

Soient $u \in H^1(A_\epsilon)$ et $Lu \in H^{m-2}(A_\epsilon)$. Soient maintenant $A_{\epsilon/m} \subset A_\epsilon$ et $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\eta = 1$ sur $A_{\epsilon/m}$ et supp$(\eta) \subset A_\epsilon$. On pose $v = \eta u$, et on suppose que $v \in H^m(A_\epsilon)$ et vérifie

$$\|v\|_{m,A_\epsilon} \lesssim \|Lv\|_{m-2,A_\epsilon} + \|v\|_{1,A_\epsilon}. \tag{4.11}$$

Alors, $u \in H^m(A_{\epsilon/m})$ *et satisfait*

$$\|u\|_{m,A_{\epsilon/m}} \lesssim \|Lu\|_{m-2,A_\epsilon} + \|u\|_{1,A_\epsilon}.$$

Preuve : Ce résultat peut être démontré par récurrence sur ℓ pour $2 \leq \ell \leq m$. Pour $\ell = 2$, par (4.11), on a

$$\|v\|_{2,A_\epsilon} \lesssim \|Lv\|_{0,A_\epsilon} + \|v\|_{1,A_\epsilon}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on a

$$Lv = \eta Lu + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x) \sum_{\beta<\alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta u \partial^{\alpha-\beta}\eta, \tag{4.12}$$

et donc :

$$\|Lv\|_{0,A_\epsilon} \lesssim \|Lu\|_{0,A_\epsilon} + \sum_{|\alpha|\leq 2} \sup_{x\in A_\epsilon} |a_\alpha(x)| \sum_{|\beta|<|\alpha|} \sup|\partial^{\alpha-\beta}\eta| \; \|\partial^\beta u\|_{0,A_\epsilon}.$$

D'où comme $\eta = 1$ sur $A_{\epsilon/2}$, on obtient

$$\|u\|_{2,A_{\epsilon/2}} \leq \|v\|_{2,A_\epsilon} \lesssim \|Lu\|_{0,A_\epsilon} + \|u\|_{1,A_\epsilon}.$$

Supposons donc que pour $3 \leq \ell \leq m$, on a $u \in H^{\ell-1}(A_{\epsilon/(\ell-1)})$ avec

$$\|u\|_{\ell-1,A_{\epsilon/(\ell-1)}} \lesssim \|Lu\|_{\ell-3,A_\epsilon} + \|u\|_{1,A_\epsilon}. \tag{4.13}$$

Supposons aussi que pour $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\eta = 1$ sur $A_{\epsilon/\ell}$ et *supp*$(\eta) \subset A_{\epsilon/(\ell-1)} \subset A_\epsilon$, on a $v = \eta u \in H^\ell(A_\epsilon)$ et vérifie

$$\|v\|_{\ell,A_\epsilon} \lesssim \|Lv\|_{\ell-2,A_\epsilon} + \|v\|_{1,A_\epsilon}, \tag{4.14}$$

et montrons que $u \in H^\ell(A_{\epsilon/\ell})$ et satisfait

$$\|u\|_{\ell,A_{\epsilon/\ell}} \lesssim \|Lu\|_{\ell-2,A_\epsilon} + \|u\|_{1,A_\epsilon}.$$

Comme $\eta = 1$ sur $A_{\epsilon/\ell}$, par (4.14) on a

$$\|u\|_{\ell,A_{\epsilon/\ell}} \lesssim \|Lv\|_{\ell-2,A_\epsilon} + \|v\|_{1,A_\epsilon}. \tag{4.15}$$

D'une part, par le Lemme 1.1.3 on a

$$\|v\|_{1,A_\epsilon} \lesssim \|u\|_{1,A_\epsilon}. \tag{4.16}$$

D'autre part, par définition de la norme $H^{\ell-2}(A_\epsilon)$ on a

$$\|Lv\|^2_{\ell-2,A_\epsilon} = \sum_{|\gamma|\leq \ell-2} \|\partial^\gamma(Lv)\|^2_{0,A_\epsilon}.$$

Mais en utilisant (4.12), on a

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma(Lv) &= \sum_{\nu\leq\gamma} C^\nu_\gamma \partial^\nu(Lu)\partial^{\gamma-\nu}\eta \\
&\quad + \sum_{|\alpha|\leq 2}\sum_{\beta<\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma} C^\nu_\gamma(\partial^{\gamma-\nu}a_\alpha)\partial^\nu\Big(\partial^\beta u\partial^{\alpha-\beta}\eta\Big) \\
&= \sum_{\nu<\gamma} C^\nu_\gamma \partial^\nu(Lu)\partial^{\gamma-\nu}\eta + \partial^\gamma(Lu)\eta \\
&\quad + \sum_{|\alpha|\leq 2}\sum_{\beta<\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma} C^\nu_\gamma(\partial^{\gamma-\nu}a_\alpha)\sum_{\mu\leq\nu} C^\mu_\nu\partial^\mu(\partial^\beta u)\partial^{\nu-\mu}\Big(\partial^{\alpha-\beta}\eta\Big).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\|Lv\|^2_{\ell-2,A_\epsilon} &\lesssim \sum_{|\gamma|\leq\ell-2}\sum_{|\nu|<|\gamma|}\|\partial^\nu(Lu)\|^2_{0,A_{\epsilon/(\ell-1)}} + \|Lu\|_{\ell-2,A_{\epsilon/(\ell-1)}} \\
&\quad + \sum_{|\gamma|\leq\ell-2}\sum_{|\alpha|\leq 2}\sum_{|\beta|<|\alpha|}\sum_{|\nu|\leq|\gamma|}\sum_{|\mu|\leq|\nu|}\|\partial^{\mu+\beta}u\|^2_{0,A_{\epsilon/(\ell-1)}} \\
&\lesssim \|Lu\|^2_{\ell-2,A_{\epsilon/(\ell-1)}} + \|u\|^2_{\ell-1,A_{\epsilon/(\ell-1)}}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.13), on obtient

$$\|Lv\|^2_{\ell-2,A_\epsilon} \lesssim \|Lu\|^2_{\ell-2,A_{\epsilon/(\ell-1)}} + \|Lu\|^2_{\ell-3,A_\epsilon} + \|u\|^2_{1,A_\epsilon}.$$

Comme $A_{\epsilon/(\ell-1)} \subset A_\epsilon$ et $Lu \in H^{\ell-2}(A_\epsilon)$, on en déduit que

$$\|Lv\|^2_{\ell-2,A_\epsilon} \lesssim \|Lu\|^2_{\ell-2,A_\epsilon} + \|u\|^2_{1,A_\epsilon}.$$

Retournons à (4.15), en utilisant cette dernière inégalité avec (4.16) on conclut que $u \in H^\ell(A_{\epsilon/\ell})$ et satisfait

$$\|u\|_{\ell,A_{\epsilon/\ell}} \lesssim \|Lu\|_{\ell-2,A_\epsilon} + \|u\|_{1,A_\epsilon}.$$

■

Montrons maintenant un théorème de shift dans les espaces de Sobolev avec poids, donné pour des opérateurs elliptiques avec des coefficients variables définis sur des dièdres (le cas des coefficients constants est démontré dans [14, Théorème 5.1]).

Théorème 4.1.4. *Soient K un cone de $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient*

$$W := (K \cap B(0,1)) \times (-1,1) \quad \textit{et} \quad W_\epsilon := (K \cap B(0,1+\epsilon)) \times (-1-\epsilon, 1+\epsilon),$$

avec $\epsilon > 0$. Soit $x = (x_\perp, x_3)$ avec $x_\perp \in K \cap B(0,1)$ et $x_3 \in (-1,1)$. L'arête $e \in W_\epsilon$ est le sous-ensemble $\{x = (0, x_3), -1-\epsilon < x_3 < 1+\epsilon\}$.

Soit L un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 défini sur W_ϵ à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^m(\overline{W_\epsilon})$ [1],

$$L = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha.$$

Pour tout $m \geq 2$, soit $f \in V_\alpha^{m-2}(W_\epsilon; e)$ et soit u une fonction dans $H^2_{loc}\Big(\overline{W}_\epsilon \backslash e)$ qui satisfait

$$\begin{cases} Lu &= f, \qquad\qquad \text{dans } W_\epsilon, \\ u &= 0, \qquad \text{sur } \partial W_\epsilon := (\partial K \cap B(0, 1+\epsilon)) \times (-1-\epsilon, 1+\epsilon). \end{cases} \tag{4.17}$$

On suppose de plus que $u \in V^1_{\alpha-m+1}(W_\epsilon; e)$. Alors $u \in V^m_\alpha(W; e)$ et vérifie l'estimation

$$\|u\|_{V^m_\alpha(W;e)} \lesssim \|f\|_{V^{m-2}_\alpha(W_\epsilon;e)} + \|u\|_{V^1_{\alpha-m+1}(W_\epsilon;e)}.$$

Remarque 4.1.5. *Dans ce cas, remarquons que $d(x,e) = |x_\perp|$.*

Preuve : La preuve est basée sur le recouvrement dyadique de W_ϵ en utilisant une homothétie en plus d'une translation en x_3 :

$$h^{j,\nu} : \hat{x} \mapsto x = 2^{-j}(\hat{x} + (0, 0, \frac{\nu}{2})),$$

avec $j \in \mathbb{N}$ et $|\nu| < 2^{j+1}$. Soient maintenant

$$A := \{\hat{x}_\perp \in K \mid \frac{1}{4} < |\hat{x}_\perp| < 1\} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

et A_ϵ donné par (4.4). Donc

$$W = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{|\nu|<2^{j+1}} h^{j,\nu}(A) \ \text{ et } \ W_\epsilon \supset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{|\nu|<2^{j+1}} h^{j,\nu}(A_\epsilon).$$

Notons par $h^{j,\nu}_* u$ la fonction $u \circ h^{j,\nu}$ et par $h^{j,\nu}_* f$ la fonction $f \circ h^{j,\nu}$.
Alors $h^{j,\nu}_* u$ et $h^{j,\nu}_* f$ sont définis sur A_ϵ et comme u satisfait (4.17), on trouve que $h^{j,\nu}_* u$ vérifie

$$\begin{cases} L\Big(2^{-j}(\hat{x} + (0,0,\tfrac{\nu}{2})), 2^j\partial_{\hat{x}}\Big)(h^{j,\nu}_* u) = h^{j,\nu}_* f, & \text{dans} \quad A_\epsilon, \\ \quad h^{j,\nu}_* u = 0, & \text{sur} \quad (\partial K \times \mathbb{R}) \cap \bar{A}_\epsilon. \end{cases} \tag{4.18}$$

1. par uniformément elliptique sur $\overline{W_\epsilon}$, on veut dire que la partie principale gelée en tout point $x_0 \in \overline{W_\epsilon}$ satisfait $L_{pp}(x_0, i\xi) \geq \gamma\|\xi\|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, pour un certain $\gamma > 0$ indépendant de x_0 et ξ.

Notons par $L^{j,\nu}$ l'opérateur défini pour $\hat{x} = (\hat{x}_\perp, \hat{x}_3)$ dans A_ϵ par

$$L^{j,\nu}(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) := 2^{-2j} L\Big(2^{-j}(\hat{x} + (0,0,\frac{\nu}{2})), 2^j \partial_{\hat{x}}\Big).$$

Le problème (4.18) devient

$$\begin{cases} L^{j,\nu}(h_*^{j,\nu} u) = 2^{-2j} h_*^{j,\nu} f, & \text{dans} \quad A_\epsilon, \\ \quad h_*^{j,\nu} u = 0, & \text{sur} \quad (\partial K \times \mathbb{R}) \cap \bar{A}_\epsilon. \end{cases} \tag{4.19}$$

La fonction u qui vérifie le problème (4.17) est dans $V^1_{\alpha-m+1}(W_\epsilon; e)$ donc $h_*^{j,\nu} u \in H^1(A_\epsilon)$. De même, comme $f \in V^{m-2}_\alpha(W_\epsilon; e)$, on trouve donc que $L^{j,\nu}(h_*^{j,\nu} u) = 2^{-2j} h_*^{j,\nu} f \in H^{m-2}(A_\epsilon)$.
De plus, comme L est elliptique sur $h^{j,\nu}(A_\epsilon)$, l'opérateur $L^{j,\nu}$ obtenu par le changement de variable, est elliptique sur A_ϵ. Ainsi, comme $h_*^{j,\nu} u \in H^2(A_\epsilon)$ par le Théorème 2.3.2 (i) de [11], on obtient pour m fixé et pour j, ν fixés, que $h_*^{j,\nu} u \in H^m(A_{\frac{\epsilon}{2}})$ et satisfait

$$\|h_*^{j,\nu} u\|_{m, A_{\frac{\epsilon}{2}}} \leq c_{j,\nu} \Big(\|2^{-2j} L(h_*^{j,\nu} u)\|_{m-2, A_\epsilon} + \|h_*^{j,\nu} u\|_{1, A_\epsilon} \Big). \tag{4.20}$$

Pour conclure, on doit montrer que la constante $c_{j,\nu}$ peut être choisie indépendamment de j et ν.

Soit donc $L^{j,\nu}_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), \partial_{\hat{x}}\Big)$ l'opérateur défini par

$$L^{j,\nu}_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), \partial_{\hat{x}}\Big) := 2^{-2j} L_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), 2^j \partial_{\hat{x}}\Big) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}) \partial^\alpha_{\hat{x}}, \tag{4.21}$$

avec $L_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), 2^j \partial_{\hat{x}}\Big)$ la partie principale de L gelée en $(0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2})$. Soit maintenant Q un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^m$ tel que $A_\epsilon \subset Q$ et soit $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ une fonction de troncature telle que $\eta = 1$ sur A et η est à support dans $A_{\frac{\epsilon}{2}} \subset A_\epsilon$.
Soit $v := \eta h_*^{j,\nu} u$. Remarquons que $v = \eta h_*^{j,\nu} u \in H^1(Q)$, il suffit de vérifier donc que

$$L^{j,\nu}_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), \partial_{\hat{x}}\Big)(v) \in H^{m-2}(Q),$$

pour pouvoir appliquer le Théorème 2.3.2 (ii) de [11] à l'opérateur $L^{j,\nu}_{pp}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), \partial_{\hat{x}}\Big)$.
La formule de Leibniz appliquée sur $L(\eta h_*^{j,\nu} u)$ donne

$$Lv = L(h_*^{j,\nu} u)\eta + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha\Big(2^{-j}(\hat{x} + (0,0,\frac{\nu}{2}))\Big) 2^{j|\alpha|} \sum_{\beta<\alpha} C^\beta_\alpha \partial^\beta_{\hat{x}}(h_*^{j,\nu} u) \partial^{\alpha-\beta}_{\hat{x}} \eta. \tag{4.22}$$

Par (4.20), comme $h_*^{j,\nu} u \in H^m(A_{\frac{\epsilon}{2}}) \hookrightarrow H^{m-1}(A_{\frac{\epsilon}{2}})$, et comme $L(h_*^{j,\nu} u) = h_*^{j,\nu} f \in H^{m-2}(A_\epsilon)$, on en déduit par (4.22) que $Lv \in H^{m-2}(Q)$. Comme on a de plus $v \in H^m(Q)$ (car $h_*^{j,\nu} u \in H^m(A_{\frac{\epsilon}{2}})$), on conclut directement que $L_{pp}((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}), 2^j \partial_{\hat{x}}) v \in H^{m-2}(Q)$, ou

encore $L_{pp}^{j,\nu}((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}})v \in H^{m-2}(Q)$ grâce à (4.21).
Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.3.2(ii) de [11], on déduit que pour tout $m \geq 2$, $v \in H^m(Q)$ satisfait

$$\|v\|_{m,Q} \leq c_{j,\nu}\Big(\|L_{pp}^{j,\nu}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}}\Big)v\|_{m-2,Q} + \|v\|_{1,Q}\Big).$$

L'opérateur L est uniformément elliptique en tout point $a \in e$, donc $L_{pp}^{j,\nu}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}}\Big)$ donné par (4.21), est aussi uniformément elliptique et la constante obtenue dans la dernière estimation appartient à une bande uniforme, et donc

$$\|v\|_{m,Q} \leq c_m\Big(\|L_{pp}^{j,\nu}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}}\Big)v\|_{m-2,Q} + \|v\|_{1,Q}\Big). \tag{4.23}$$

Estimons le premier terme du membre de droite. On a

$$\begin{aligned}\|L_{pp}^{j,\nu}((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}})(v)\|_{m-2,Q} \leq \|[L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}}) - &L_{pp}^{j,\nu}((0,0,\tfrac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}})](v)\|_{m-2,Q}\\ &+\|L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(v)\|_{m-2,Q}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Par le Lemme 4.1.1, comme $supp(\eta) \subset A_\epsilon \subset Q$, on obtient

$$\Bigg\|\Bigg(L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}}) - L_{pp}^{j,\nu}\Big((0,0,\frac{2^{-j}\nu}{2}),\partial_{\hat{x}}\Big)\Bigg)(v)\Bigg\|_{m-2,Q} \leq c2^{-j}\|v\|_{m,Q}. \tag{4.25}$$

Par conséquent, (4.23), (4.24) et (4.25) impliquent

$$\|v\|_{m,Q} \leq c_m\Big(\|L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(v)\|_{m-2,Q} + c2^{-j}\|v\|_{m,Q} + \|v\|_{1,Q}\Big),$$

ou encore,

$$(1 - cc_m 2^{-j})\|v\|_{m,Q} \leq c_m\Big(\|L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(v)\|_{m-2,Q} + \|u\|_{1,Q}\Big).$$

Pour $j \geq j_1$ avec j_1 suffisamment grand tel que $cc_m 2^{-j_1} \leq \frac{1}{2}$, on obtient

$$\|v\|_{m,Q} \leq 2c_m\Big(\|L^{j,\nu}(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(v)\|_{m-2,Q} + \|v\|_{1,Q}\Big).$$

Par définition de v, en utilisant le Lemme 4.1.3, on obtient

$$\begin{aligned}\|h_*^{j,\nu}u\|_{m,A} &\leq \tilde{c}_m\Big(\|2^{-2j}L\Big(2^{-j}(\hat{x}+(0,0,\frac{\nu}{2})),2^j\partial_{\hat{x}}\Big)(h_*^{j,\nu}u)\|_{m-2,A_{\frac{\epsilon}{2}}} + \|h_*^{j,\nu}u\|_{1,A_{\frac{\epsilon}{2}}}\Big)\\ &\leq \tilde{c}_m\Big(\|2^{-2j}L\Big(2^{-j}(\hat{x}+(0,0,\frac{\nu}{2})),2^j\partial_{\hat{x}}\Big)(h_*^{j,\nu}u)\|_{m-2,A_\epsilon} + \|h_*^{j,\nu}u\|_{1,A_\epsilon}\Big).\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$\Big[\sum_{|\alpha|\le m}\|2^{-j|\alpha|}\partial^\alpha u\|^2_{h^{j,\nu}(A)}\Big]^{\frac{1}{2}}\lesssim\Big[\sum_{|\alpha|\le m-2}\|2^{-j(2+|\alpha|)}\partial^\alpha Lu\|^2_{h^{j,\nu}(A_\epsilon)}\Big]^{\frac{1}{2}}+\Big[\sum_{|\alpha|\le 1}\|2^{-j|\alpha|}\partial^\alpha u\|^2_{h^{j,\nu}(A_\epsilon)}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout (j,ν), on peut multiplier chaque terme par $2^{-j\beta}$ et remplacer 2^{-j} par r (comme $2^{-j}\simeq r$ sur $h^{j,\nu}(A_\epsilon)$), et on obtient

$$\Big[\sum_{|\alpha|\le m}\|r^{|\alpha|+\beta}\partial^\alpha u\|^2_{h^{j,\nu}(A)}\Big]^{\frac{1}{2}}\lesssim\Big[\sum_{|\alpha|\le m-2}\|r^{\beta+|\alpha|+2}\partial^\alpha Lu\|^2_{h^{j,\nu}(A_\epsilon)}\Big]^{\frac{1}{2}}+\Big[\sum_{|\alpha|\le 1}\|r^{\beta+|\alpha|}\partial^\alpha u\|^2_{h^{j,\nu}(A_\epsilon)}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

En sommant sur $j\in\mathbb{N}$ et sur ν tel que $|\nu|<2^{j+1}$, on obtient

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m}(W;e)}\lesssim\|Lu\|_{V^{m-2}_{\beta+m}(W_\epsilon;e)}+\|u\|_{V^1_{\beta+1}(W_\epsilon;e)}.$$

En posant $\alpha=\beta+m$, on obtient le résultat cherché. ∎

Dans le but d'étudier la régularité locale de la solution, on a besoin de la nouvelle formulation variationnelle du problème localisé, et donc du lemme suivant.

Lemme 4.1.6. *Soit σ une fracture courbe unidimensionnelle, assez régulière et strictement incluse dans un domaine borné $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^3$. Soit $u\in\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$ la solution de (4.1) avec $\beta>0$ et soient x_0 un point intérieur de σ et $\epsilon_1>0$ assez petit tel que $B(x_0,\epsilon_1)$ ne contient pas les extrêmes de σ.*
Considérons $\eta_1\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ une fonction de troncature telle que $\eta_1=1$ sur $B(x_0,\epsilon)$ et supp$(\eta_1)\subset B(x_0,\epsilon_1)$ avec $\epsilon_1>\epsilon>0$. Alors il existe une suite de fonctions $(w_n)_n$ dans $\mathcal{C}^{m+2}_0\Big(B(x_0,\epsilon)\backslash\sigma\Big)$, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ et à support compact inclus dans $B(x_0,\epsilon)\backslash\sigma$, qui tend vers u dans $H^1_\beta(B(x_0,\epsilon);\sigma)$ lorsque $n\to\infty$.

Preuve : Soit $u\in\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$ la solution de (4.1). Soit encore $\eta_1\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction de troncature telle que $\eta_1=1$ sur $B(x_0,\epsilon)$ et *supp*$(\eta_1)\subset B(x_0,\epsilon_1)$ avec $\epsilon_1>\epsilon$.

Dans le but de redresser σ, on utilise le fait que σ est une sous variété de dimension 1 assez régulière (voir [9, Théorème 2.1.2, p. 56]), on déduit que pour tout $x_0\in\sigma$, il existe des voisinages ouverts U' et V' de x_0 et de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un $\mathcal{C}^{m+2}-$difféomorphisme $\varphi:U'\to V'$ tel que $\varphi(x_0)=0$ et

$$\varphi(U'\cap\sigma)=\{(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)\in V':\hat{x}_1=\hat{x}_2=0\}=(\{0\}\times\mathbb{R})\cap V'=:\hat{\sigma},$$

et donc

$$(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=(\varphi_1(x_1,x_2,x_3),\varphi_2(x_1,x_2,x_3),\varphi_3(x_1,x_2,x_3)).$$

Ce difféomorphisme φ transforme η_1u en $\widehat{\eta_1u}$ dans $\mathring{H}^1_\beta(B(0,\epsilon_1);\hat{\sigma})=\mathring{V}^1_\beta(B(0,\epsilon_1);\hat{\sigma})$ et $\hat{\eta}_1$ est nul en dehors de $B(0,\epsilon_1)$ donc $\widehat{\eta_1u}\in V^1_\beta(\mathbb{R}^3;\hat{\sigma})$.

Or par [32, p. 24], on déduit l'existence de $\hat{u}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \backslash \hat{\sigma})$ telle que

$$\hat{u}_n \to \widehat{\eta_1 u} \text{ dans } V^1_\beta(\mathbb{R}^3; \hat{\sigma}).$$

Soit maintenant $\eta_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\eta_2 = 1$ sur $B(0, \epsilon)$ et $supp(\eta_2) \subset B(0, \epsilon_1)$ donc

$$\eta_2 \hat{u}_n \to \eta_2 \widehat{\eta_1 u} \text{ dans } V^1_\beta(\mathbb{R}^3; \hat{\sigma}).$$

Finalement, il existe $\hat{w}_n := \eta_2 \hat{u}_n \in \mathcal{D}(B(0, \epsilon_1) \backslash \hat{\sigma})$ qui tend vers $\eta_2 \widehat{\eta_1 u_0}$ dans $\mathring{V}^1_\beta(B(0, \epsilon_1); \hat{\sigma}) = \mathring{H}^1_\beta(B(0, \epsilon_1); \hat{\sigma})$. Ce qui permet de conclure qu'il existe une suite $(w_n := \hat{w}_n \circ \varphi)_n$ dans $\mathcal{C}^{m+2}_0\big(B(x_0, \epsilon) \backslash \sigma\big)$ telle que $w_n \to u$ dans $H^1_\beta\big(B(x_0, \epsilon); \sigma\big)$. ■

Arrivons maintenant au théorème principale de cette section où on montre une régularité améliorée de la solution de (4.1) localement.

Théorème 4.1.7. *Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \beta < 1$ et soit $m \geq 1$. Soit $q \in L^2(\sigma)$ et soit $u \in \mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O}; \sigma)$ la solution de (4.1). Si on note U un voisinage d'un point x_0 qui se trouve à l'intérieur de σ, i.e.*

$$U := B(x_0, \delta),$$

pour un certain $\delta > 0$ suffisamment petit pour que les extrémités de σ n'appartiennent pas à $B(x_0, \delta)$, alors $u \in V^m_{\beta+m-1}(U; \sigma)$ et satisfait

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{4.26}$$

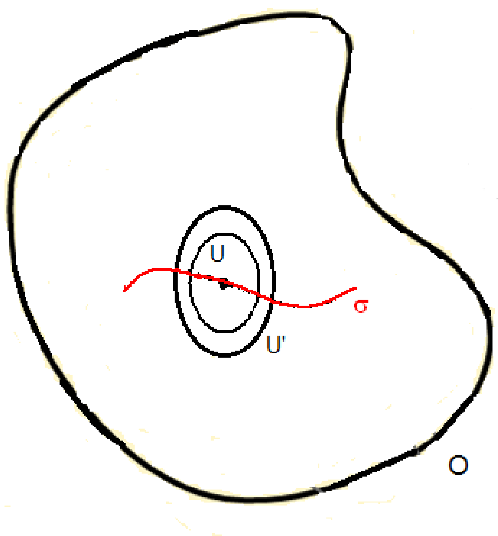

FIGURE 4.2 – Localisation à l'intérieur de σ.

Preuve : Le résultat peut être démontré par récurrence.

Étape 1 : $u \in V^2_{\beta+1}(U; \sigma)$ **et satisfait** (4.26) **pour** $m = 2$.

Étape 1-1 : Localisation du problème.
Soit
$$U' = B(x_0, \delta + \epsilon),\ \text{avec } \epsilon > 0 \text{ assez petit,}$$
un deuxième voisinage de x_0. Fixons une fonction de troncature $\eta_0 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ telle que
$$\begin{cases} \eta_0 = 1 & \text{sur } U, \\ \eta_0 = 0 & \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \backslash U'. \end{cases}$$

Soit $u_0 := \eta_0 u$ donc $u_0 \in \mathring{H}^1_\beta(U';\sigma)$. Formellement, on peut considérer $u_0 \in \mathring{H}^1_\beta(U';\sigma)$ comme solution de
$$\begin{cases} -\Delta u_0 & = q_0\delta_\sigma + f_0(u), \quad \text{dans} \quad U', \\ \quad u_0 & = 0, \qquad\qquad\quad \text{sur} \quad \partial U', \end{cases} \tag{4.27}$$
avec $q_0 = \eta_0 q$ et $f_0(u) = -2\nabla\eta_0\nabla u - \Delta\eta_0 u$, dans le sens que u_0 est l'élément dans $\mathring{H}^1_\beta(U';\sigma)$ qui satisfait
$$\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_\sigma q_0\gamma_\sigma \bar{v} + \int\limits_{U'} f_0(u)\bar{v}, \quad \forall v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(U';\sigma).$$

En effet, soit $v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(U';\sigma)$ donc $\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v}$ est bien définie et on a
$$\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} + \int\limits_{U'} \eta_0\nabla u \cdot \overline{\nabla v}. \tag{4.28}$$

Commençons par le premier terme du membre à droite de (4.28). A l'aide d'un argument de localisation, on obtient que la solution $u \in H^1_\beta(B(x_0, \delta+\epsilon);\sigma)$ donc par le Lemme 4.1.6, on déduit l'existence de $w_n \in \mathcal{C}^{m+2}_0(B(x_0, \delta+\epsilon)\backslash\sigma)$ telle que
$$w_n \to u \quad \text{dans} \quad H^1_\beta(B(x_0, \delta+\epsilon);\sigma).$$

Comme $\eta_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ et $\nabla v \in L^2_{-\beta}(U';\sigma) \hookrightarrow L^2(U')$ on obtient grâce au théorème de la convergence dominée,
$$\int\limits_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'} w_n\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'\backslash O} w_n\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v},$$
avec O un voisinage de σ tel que $w_n = 0$ sur O. Par application de la formule de Green, on trouve
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'\backslash O} w_n\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = -\lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'\backslash O} \operatorname{div}(w_n\nabla\eta_0)\bar{v}.$$
Une deuxième application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet

de déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'\setminus O} \operatorname{div}(w_n \nabla\eta_0)\bar{v} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{U'} \operatorname{div}(w_n \nabla\eta_0)\bar{v} = \int\limits_{U'} \operatorname{div}(u\nabla\eta_0)\bar{v},$$

ce qui permet de conclure que

$$\int\limits_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = -\int\limits_{U'} \operatorname{div}(u\nabla\eta_0)\bar{v}. \tag{4.29}$$

Pour le second terme du membre à droite de (4.28), par la formule de Leibniz, on a

$$\int\limits_{U'} \eta_0 \nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} - \int\limits_{U'} \bar{v}\nabla u \cdot \nabla\eta_0. \tag{4.30}$$

Mais alors on obtient par (4.29) et (4.30) que

$$\begin{aligned} \int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} &= \int\limits_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} - \int\limits_{U'} \bar{v}\Big[\operatorname{div}(u\nabla\eta_0) + \nabla u \cdot \nabla\eta_0\Big] \\ &= \int\limits_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} - \int\limits_{U'} \bar{v}\Big[2\nabla u \cdot \nabla\eta_0 + \Delta\eta_0 u\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\eta_0 v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(\mathcal{O};\sigma)$, par (4.2) on a

$$\int\limits_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} = \int\limits_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} = \int\limits_{\sigma} \eta_0 q \overline{\gamma_\sigma v}.$$

On en déduit que

$$\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_{\sigma} \eta_0 q \overline{\gamma_\sigma v} - \int\limits_{U'} \bar{v}\Big[2\nabla u \cdot \nabla\eta_0 + \Delta\eta_0 u\Big].$$

Étape 1-2 : Transformation locale du problème avec fracture courbe en un problème avec fracture droite.

On utilise toujours le fait que σ est une sous-variété de dimension 1 de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ (voir [9, Théorème 2.1.2, p. 56]), et à l'aide du difféomorphisme φ, le problème (4.27) devient

$$\begin{cases} L\hat{u}_0 &= \hat{q}_0\delta_{\hat{\sigma}} + \hat{f}_0(\hat{u}), \quad \text{dans} \quad V', \\ \quad \hat{u}_0 &= 0, \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial V', \end{cases} \tag{4.31}$$

où V' contient $B(0,\delta_1+\epsilon)\times(-\delta_1-\epsilon,\delta_1+\epsilon)$ avec δ_1,ϵ assez petits, et L est un opérateur

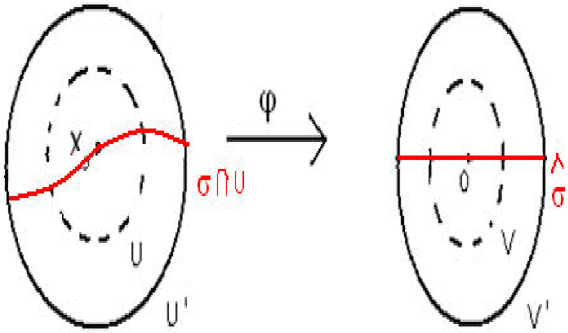

FIGURE 4.3 – Transformation locale d'un voisinage d'un point intérieur x_0 de σ par φ.

d'ordre 2, à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^m$ avec $m \geq 2$, donné par

$$L = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_j}. \tag{4.32}$$

De même, $\hat{f}_0(\hat{u})$ est donné par

$$\hat{f}_0(\hat{u}) = (L\hat{\eta}_0)\hat{u} - 2\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_k}\right), \tag{4.33}$$

et $\hat{q}_0$ par

$$\hat{q}_0(0,0,\hat{z}) = (\eta_0 q)\circ\varphi^{-1}(0,0,\hat{z}). \tag{4.34}$$

Ainsi, $\hat{u}_0 = (\eta_0 u)\circ\varphi^{-1} = u_0\circ\varphi^{-1}$, $\hat{u} = u\circ\varphi^{-1}$ et $\hat{\eta}_0 = \eta_0\circ\varphi^{-1}$, et la solution $\hat{u}_0$ de ce problème est dans $\mathring{H}^1_\beta(V';\hat{\sigma})$.

Grâce à l'ellipticité du laplacien, l'opérateur L obtenu à l'aide du difféomorphisme $\varphi : U' \to V'$ est uniformément elliptique. En effet, soit L_{pp} sa partie principale, i.e.

$$L_{pp} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} L_{pp}(x,i\xi) &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(i\xi_j)(i\xi_k) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\xi_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\xi_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\xi_j\right)^2 \\ &= \|\nabla\varphi\cdot\xi\|^2, \end{aligned}$$

où $\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i})_{1\leq i,j\leq 3}$. Rappelons que φ est au moins un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme, donc il existe $\phi : V' \to U'$ tel que $\phi\circ\varphi = I_3$, et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\phi\circ\varphi]_j = \delta_{ij},$$

ou encore $\nabla(\phi\circ\varphi) = I_3$. On obtient donc

$$(\nabla\phi\circ\varphi)\cdot\nabla\varphi = I_3,$$

ce qui signifie que $\nabla\varphi$ est une matrice inversible et donc l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que $\|(\nabla\varphi)^{-1}\| \geq C_1 > 0$. Comme φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, on obtient que $(\nabla\varphi)^{-1}$ est uniformément borné en x, et on conclut que

$$L_{pp}(x,\xi) = \|\nabla\varphi\cdot\xi\|^2 \geq C_2\|\xi\|^2,$$

avec C_2 indépendant de x.

Étape 1-3 : Estimation a priori pour $m = 2$.

Soient maintenant pour δ_1 et ϵ assez petit,

$$W = B(0,\delta_1)\backslash\{0\}\times(-\delta_1,\delta_1),$$

$$W_\epsilon = B(0,\delta_1+\epsilon)\backslash\{0\}\times(-\delta_1-\epsilon,\delta_1+\epsilon).$$

Alors la solution $\hat{u}_0$ du problème (4.31), qui est dans $\mathring{V}^1_\beta(V',\hat{\sigma})$, peut être considérée comme solution de

$$L\hat{u}_0 \quad = \hat{f}_0(\hat{u}) \quad \text{dans} \quad W_\epsilon, \tag{4.35}$$

Dans le but d'appliquer le Théorème 4.1.4, on doit d'abord vérifier que ses conditions sont satisfaites (ici $K = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et donc on n'a pas de conditions au bord) :

- La solution u_0 du problème (4.27) est dans $H^1_\beta(U';\sigma)$ alors la solution $\hat{u}_0$ du problème (4.31) est dans $H^1_\beta(V';\hat{\sigma})$, ou encore $\hat{u}_0$, solution de (4.35), est dans $H^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})$. On en déduit que $\hat{u}_0 \in V^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})$ avec

$$\begin{aligned}\|\hat{u}_0\|_{V^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})} &\sim \|\hat{u}_0\|_{H^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{H^1_\beta(V';\hat{\sigma})} \\ &\sim \|u_0\|_{H^1_\beta(U';\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(U';\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

- Le second membre $\hat{f}_0(\hat{u})$ de (4.35) est dans $L^2_{\beta+1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})$. En effet,

$$\begin{aligned}\|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{L^2_{\beta+1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})} &\sim \|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\ &\leq \|(L\hat{\eta}_0)\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} + 2\sum_{i=1}^{3}\|(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{u})(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{\eta}_0)\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Estimons d'abord $\|(L\hat{\eta}_0)\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})}$. Comme $L^2_\beta(V',\hat{\sigma}) \hookrightarrow L^2_{\beta+1}(V',\hat{\sigma})$, on a

$$\begin{aligned}
\|(L\hat{\eta}_0)\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} &\leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k}\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \|\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_j}\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\
&\leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\|_\infty \|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\|_\infty \sup_{\hat{x}\in V'} |\frac{\partial^2 \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k}| \|\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \|\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i^2}\|_\infty \sup_{\hat{x}\in V'} |\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_j}| \|\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\
&\leq c_1 \|\hat{u}\|_{L^2_\beta(V';\hat{\sigma})},
\end{aligned}$$

avec $c_1 = c\Big(\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\|_\infty)^2, \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\|\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i^2}\|_\infty, \sum_{\alpha\leq 2}\|\partial^\alpha \eta_0\|_\infty\Big)$.
Ainsi, on obtient

$$\|(L\hat{\eta}_0)\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \leq c_1\|\hat{u}\|_{H^1_\beta(V';\hat{\sigma})} \simeq c_1\|u\|_{H^1_\beta(U';\sigma)} \leq c_1\|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)}. \tag{4.38}$$

Il reste à estimer $\sum_{i=1}^{3}\|(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{u})(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{\eta}_0)\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\|(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{u})(\partial_{x_i}\varphi\cdot\nabla\hat{\eta}_0)\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} &\lesssim \|\nabla\varphi\|^2_\infty \sup_{\hat{x}\in V'}|\nabla\hat{\eta}_0|\|\nabla\hat{u}\|_{L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})} \\
&\lesssim \|\varphi\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|\hat{\eta}_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|\hat{u}\|_{H^1_\beta(V';\hat{\sigma})} \\
&\lesssim c_2\|\varphi\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|\hat{\eta}_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Donc, en reportant dans (4.37), on obtient

$$\|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{L^2_{\beta+1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})} \leq \tilde{c}\|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)}, \tag{4.40}$$

avec $\tilde{c} = c_1\Big[\|\varphi\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|\hat{\eta}_0\|_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi\|^2_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)}\|\hat{\eta}_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\Big] + c_2\|\varphi\|^2_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}\|\hat{\eta}_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)}$.

- Vérifions maintenant que $\hat{u}_0 \in H^2_{loc}(\overline{W_\epsilon}\backslash\hat{\sigma})$. Fixons une fonction de troncature η et un point $p \in W_\epsilon\backslash O$, où O est un voisinage de $\hat{\sigma}$ et telle que $supp(\eta) \subset B_p(p, R_{B_p})$ avec $R_{B_p} > 0$ suffisamment petit, de sorte que $R_{B_p} \leq \inf_{y\in\partial B_p(p,R_{B_p})} d(y,\hat{\sigma})$.

  Remarquons donc que pour tout $x \in B_p(p, R_{B_p})$, on a $d(x,\hat{\sigma}) \sim 1$.
  Soit $v := \eta\hat{u}_0$. Alors v est solution de

$$\begin{cases} Lv = \eta\hat{f}_0(\hat{u}) + g(\eta,\hat{u}_0) & \text{dans } B_p(p,R_{B_p}), \\ v = 0 & \text{sur } \partial B_p(p,R_{B_p}), \end{cases} \tag{4.41}$$

avec $g(\eta,\hat{u}_0) = -(L\eta)\hat{u}_0 - 2\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{u}_0}{\partial\hat{x}_j})(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial\hat{x}_k})$.

On a déjà vérifié que $\hat{f}_0(\hat{u}) \in L^2_{\beta+1}(V';\hat{\sigma})$ et donc $\eta\hat{f}_0(\hat{u}) \in L^2_{\beta+1}(B_p(p,R_{B_p});\hat{\sigma})$ ou encore,

$$\eta\hat{f}_0(\hat{u}) \in L^2(B_p(p,R_{B_p})).$$

De plus, la fonction g est définie à l'aide des dérivées premières et deuxième de η (qui est à support dans $B_p(p,R_{B_p})$) et des dérivées premières de $\hat{u}_0 \in V^1_\beta(V';\hat{\sigma})$, donc $g \in L^2(B_p(p,R_{B_p}))$.

On déduit par la Remarque 4.2 de [10], que $v \in H^2(B_p(p,R_{B_p}))$ et par conséquent $\hat{u}_0 \in H^2_{loc}(\overline{W_\epsilon}\backslash\hat{\sigma})$.

Toutes les hypothèses du Théorème 4.1.4 sont satisfaites. On peut l'appliquer alors pour obtenir $\hat{u}_0 \in V^2_{\beta+1}(W;\hat{\sigma})$ avec $0<\beta<1$. De plus, on a

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(W;\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{V^0_{\beta+1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})} + \|\hat{u}_0\|_{V^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})}.$$

Comme $V^2_{\beta+1}(W;\hat{\sigma}) = V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})$, on obtient que $\hat{u}_0 \in V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})$ avec $V := B(0,\delta_1)\times(-\delta_1,\delta_1)$ et satisfait

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{V^0_{\beta+1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})} + \|\hat{u}_0\|_{V^1_\beta(W_\epsilon;\hat{\sigma})}.$$

En utilisant (4.36) et (4.40), on en déduit que

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)}. \tag{4.42}$$

Retournons à u. Comme

$$\|u\|_{V^2_{\beta+1}(U;\sigma)} = \|u_0\|_{V^2_{\beta+1}(U;\sigma)} \simeq \|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})},$$

en utilisant (4.42) et (4.3), on conclut que

$$\|u\|_{V^2_{\beta+1}(U;\sigma)} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Étape 2 : Montrons maintenant (4.26) **pour tout** $m\geq 3$**.**

Supposons que $u \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(U'_1;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(U'_1;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}, \tag{4.43}$$

tel que U'_1 est aussi un voisinage de x_0 qui est inclus dans U et est donné par

$$U'_1 = B(x_0,\delta_2+\epsilon) \text{ avec } \epsilon,\delta_2>0 \text{ assez petit.}$$

Et montrons que $u \in V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}, \tag{4.44}$$

où $U_1 \subset U_1'$ un voisinage de x_0 donné par $U_1 = B(x_0, \delta_2)$.
Soit η_1 une fonction de troncature telle que $\eta_1 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ et

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 & \text{sur } U_1, \\ \eta_1 = 0 & \text{sur } \overline{\mathcal{O}}\backslash U_1'. \end{cases}$$

Soit $u_1 := \eta_1 u$. Comme dans l'étape 1-1, $u_1 \in \mathring{H}^1_\beta(U_1';\sigma)$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1 & = q_1\delta_\sigma + f_1(u), \quad \text{dans} \quad U_1', \\ \quad u_1 & = 0, \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial U_1', \end{cases} \tag{4.45}$$

avec $q_1 = \eta_1 q$ et $f_1(u) = -2\nabla\eta_1\nabla u - \Delta\eta_1 u$, dans le sens que u_1 est l'élément dans $\mathring{H}^1_\beta(U';\sigma)$ qui satisfait

$$\int\limits_{U_1'} \nabla u_1 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_\sigma q_1\gamma_\sigma \bar{v} + \int\limits_{U_1'} f_1(u)\bar{v}, \quad \forall v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(U_1';\sigma).$$

En procédant de la même façon comme dans l'étape 1-2, on obtient que pour tout $x_0 \in \sigma$, il existe des voisinages ouverts U_1' et V_1' de x_0 et de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un $\mathcal{C}^{m+2}-$difféomorphisme $\varphi : U_1' \to V_1'$ tel que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U_1' \cap \sigma) = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in V_1' : \hat{x} = \hat{y} = 0\} = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cap U_1' =: \hat{\sigma},$$

et le problème (4.45) devient

$$\begin{cases} L\hat{u}_1 & = \hat{q}_1\delta_{\hat{\sigma}} + \hat{f}_1(\hat{u}), \quad \text{dans} \quad V_1', \\ \quad \hat{u}_1 & = 0, \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \partial V_1', \end{cases} \tag{4.46}$$

où L et $\hat{f}_1$ sont définis de la même façon qu'avant avec η_0 remplacé par η_1 et V_1' contient

$$B(0, \delta_2 + \epsilon) \times (-\delta_2 - \epsilon, \delta_2 + \epsilon).$$

Soient maintenant

$$W' = B(0, \delta_2)\backslash\{0\} \times (-\delta_2, \delta_2),$$

$$W_\epsilon' = B(0, \delta_2 + \epsilon)\backslash\{0\} \times (-\delta_2 - \epsilon, \delta_2 + \epsilon).$$

Alors la solution $\hat{u}_1$ du problème (4.46), qui est dans $\mathring{V}^1_\alpha(V_1';\hat{\sigma})$, peut être considérée comme solution de

$$L\hat{u}_1 \;\; = \hat{f}_1(\hat{u}) \quad \text{dans} \quad W'_\epsilon. \tag{4.47}$$

Comme précédemment, cette solution $\hat{u}_1 \in V^1_\beta(W'_\epsilon;\hat{\sigma})$ et vérifie aussi $\hat{u}_1 \in H^2_{loc}(\overline{W'_\epsilon}\backslash\hat{\sigma})$. Il reste à vérifier que $\hat{f}_1(\hat{u}) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(W'_\epsilon;\hat{\sigma})$ pour pouvoir appliquer le Théorème 4.1.4 (avec $K = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$).

Rappelons que $\hat{f}_1(\hat{u})$ est donné par

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\hat{u}) \;\; = \;\; & -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\hat{\eta}_1}{\partial\hat{x}_j\partial\hat{x}_k}\hat{u} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\hat{x}_j}\hat{u} \\ & -2\sum_{i=1}^{3}(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}_k})(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{\eta}_1}{\partial\hat{x}_j}).\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (4.43), on a

$$\|\hat{u}\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(V'_1;\hat{\sigma})} = \|u\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(U'_1;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

En utilisant donc l'injection

$$V^{m-1}_{\beta+m-2}(V'_1;\hat{\sigma}) \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-3}(V'_1;\hat{\sigma}) \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-1}(V'_1;\hat{\sigma}),$$

on obtient que $\hat{u} \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(V'_1;\hat{\sigma})$, en plus de $\nabla\hat{u} \in V^{m-2}_{\beta+m-2}(V'_1;\hat{\sigma})^2 \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-1}(V'_1;\hat{\sigma})^2$. Alors, comme $\eta_1 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ et pour tout $j = 1,..,3$, $\varphi_j \in \mathcal{C}^{m+2}(\mathbb{R}^3)$, on applique le Lemme 1.1.3, on obtient que $\hat{f}_1(\hat{u}) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(W_\epsilon;\hat{\sigma})$ avec l'estimée

$$\|\hat{f}_1(\hat{u})\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(W'_\epsilon;\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{u}\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(V'_1;\hat{\sigma})}.$$

On en conclut que

$$\|\hat{f}_1(\hat{u})\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(W'_\epsilon;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{4.48}$$

On applique le Lemme 4.1.4 on obtient $\hat{u}_1 \in V^m_{\beta+m-1}(W';\hat{\sigma})$ avec $0 < \beta < 1$ et on a

$$\|\hat{u}_1\|_{V^m_{\beta+m-1}(W';\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{f}_1(\hat{u})\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(W'_\epsilon;\hat{\sigma})} + \|\hat{u}_1\|_{V^1_\beta(W'_\epsilon;\hat{\sigma})}.$$

Mais alors pour $V_1 = B(0,\delta_2) \times (-\delta_2,\delta_2)$, on a $\hat{u}_1 \in V^m_{\beta+m-1}(V_1;\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_1\|_{V^m_{\beta+m-1}(V_1;\hat{\sigma})} \lesssim \|\hat{f}_1(\hat{u})\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(W'_\epsilon;\hat{\sigma})} + \|\hat{u}_1\|_{V^1_\beta(W'_\epsilon;\hat{\sigma})}. \tag{4.49}$$

De l'étape 1-3, on a vérifié que

$$\|\hat{u}_1\|_{V^1_\beta(W'_\epsilon;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

On reporte cette dernière en plus de (4.48) dans (4.49), on obtient

$$\|\hat{u}_1\|_{V^m_{\beta+m-1}(V_1;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}.$$

Par conséquent, $u \in V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)$ et satisfait

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)} \simeq \|\hat{u}_1\|_{V^m_{\beta+m-1}(V_1;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

■

4.2 Régularité au bord de la fracture σ

Cette section est dédiée à la régularité de la solution u de (4.1) au voisinage d'une extrémité c de σ. Comme dans la section précédente, pour arriver à démontrer le résultat principal de cette section, on doit passer par les étapes suivantes :

Étape 1 : Localisation du problème (4.1)**.**
Comme dans la section précédente, on fixe une fonction de troncature $\eta_0 \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ telle que

$$\begin{cases} \eta_0 = 1 & \text{sur} \quad U, \\ \eta_0 = 0 & \text{sur} \quad \overline{\mathcal{O}} \backslash U', \end{cases}$$

avec $U \subset U'$ deux voisinages de c.

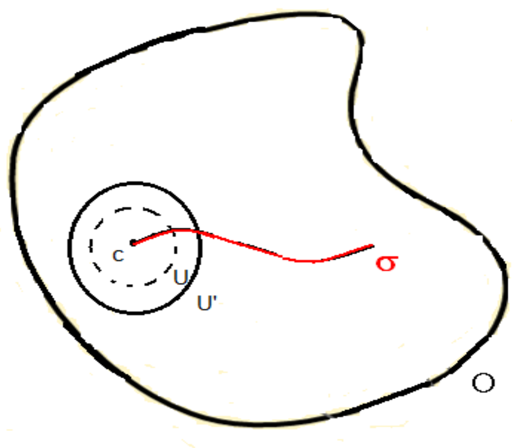

FIGURE 4.4 – Localisation au bord de la fracture.

Mais alors, $u_0 := \eta_0 u$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_0 & = q_0 \delta_\sigma + f_0(u), \quad \text{dans} \quad U', \\ \quad u_0 & = 0, \qquad\qquad\quad\;\; \text{sur} \quad \partial U', \end{cases} \tag{4.50}$$

avec $q_0 = \eta_0 q$ et $f_0(u) = -2\nabla\eta_0 \cdot \nabla u - u\Delta\eta_0$, dans le sens que u_0 est l'élément de $\mathring{H}^1_\beta(U';\sigma)$ qui satisfait

$$\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_{\sigma} q_0\gamma_\sigma \bar{v} + \int\limits_{U'} f_0(u)\bar{v}, \qquad \forall v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(U';\sigma).$$

En effet, soit $v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(U';\sigma)$. Par la formule de Leibniz, on a

$$\int\limits_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int\limits_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} + \int\limits_{U'} \eta_0 \nabla u \cdot \overline{\nabla v}. \tag{4.51}$$

Calculons le premier terme du membre à droite de (4.51). Pour cela, on considère une deuxième fonction de troncature $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ telle que $\eta = 1$ sur $B := V_\sigma \cap (U'\backslash U)$ et $supp(\eta) \subset B'$ avec V_σ un voisinage de σ et B' un petit voisinage d'une partie de σ qui contient $\bar{B}$. Comme $supp(\eta_0) \subset U'$, $\eta_0 = 1$ sur U et $\eta = 1$ sur B, on a

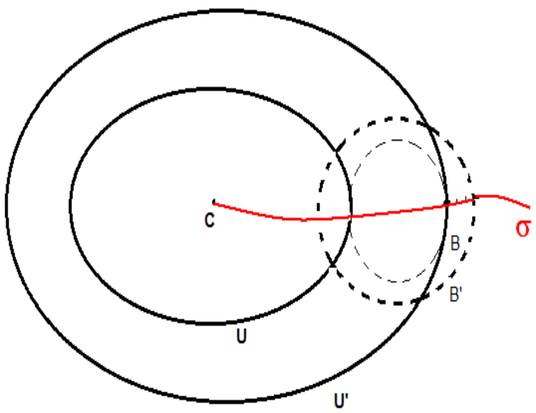

Figure 4.5 – Localisation au voisinage de σ dans $U'\backslash U$.

$$\begin{aligned}\int\limits_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} &= \int\limits_{\mathcal{O}} \eta u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} + \int\limits_{\mathcal{O}\backslash B} (1-\eta)u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} \\ &= \int\limits_{B'} \eta u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} + \int\limits_{(U'\backslash U)\backslash B} (1-\eta)u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v},\end{aligned}$$

Comme dans l'étape 1-1 du Théorème 4.1.7, en utilisant le Lemme 4.1.6, on déduit l'existence d'une suite $(w_n)_n \subset \mathcal{C}^{m+2}(B')$ qui est nulle sur un voisinage de $(\sigma \cap B')$ et telle que

$w_n \to \eta u$ dans $H^1_\beta(B';\sigma)$ et par application de la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B'} \eta u \nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} &= \lim_{n\to\infty}\int_{B'} w_n \nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v}\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_{B'} \operatorname{div}(w_n\nabla\eta_0)\overline{v}\\ &= -\int_{B'} \operatorname{div}(\eta u\nabla\eta_0)\overline{v}.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $r_\sigma \sim 1$ sur $(U'\backslash U)\backslash B$, on a $(1-\eta)u\nabla\eta_0 \in \mathring{H}^1((U'\backslash U)\backslash B)^3$, et par application de Green on obtient

$$\int_{(U'\backslash U)\backslash B} (1-\eta)u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = -\int_{(U'\backslash U)\backslash B} \operatorname{div}((1-\eta)u\nabla\eta_0)\overline{v}.$$

On obtient finalement que

$$\int_{U'} u\nabla\eta_0 \cdot \overline{\nabla v} = -\int_{U'} \operatorname{div}(u\nabla\eta_0)\overline{v}. \tag{4.52}$$

Pour le second terme du membre à droite de (4.51), par la formule de Leibniz on obtient directement

$$\int_{U'} \eta_0\nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \int_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} - \int_{U'} \bar{v}\nabla u \cdot \nabla\eta_0. \tag{4.53}$$

Mais alors on obtient par (4.52) et (4.53) que

$$\int_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} \;=\; \int_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} - \int_{U'} \bar{v}\Big[2\nabla u\cdot\nabla\eta_0 + \Delta\eta_0 u\Big].$$

Comme $\eta_0 v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(\mathcal{O};\sigma)$, par (4.2) on a

$$\int_{U'} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} = \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \overline{\nabla(\eta_0 v)} = \int_{\sigma} \eta_0 q\overline{\gamma_\sigma v}.$$

On en déduit que

$$\int_{U'} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v} = \int_{\sigma} \eta_0 q\overline{\gamma_\sigma v} - \int_{U'} \bar{v}\Big[2\nabla u\cdot\nabla\eta_0 + \Delta\eta_0 u\Big].$$

Étape 2 : Transformation du problème.
Rappelons que σ est une sous variété de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ de dimension 1, et donc il existe des voisinages ouverts U' et V' de c et de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un $\mathcal{C}^{m+2}-$difféomorphisme $\varphi : U' \to V'$

tel que $\varphi(c) = 0$ et

$$\varphi(U' \cap \sigma) = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in V' : \hat{x} = \hat{y} = 0\} = (\{0\} \times \mathbb{R}^+) \cap V' =: \hat{\sigma}, \tag{4.54}$$

avec

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z)).$$

Avec cette transformation, on obtient le nouveau problème

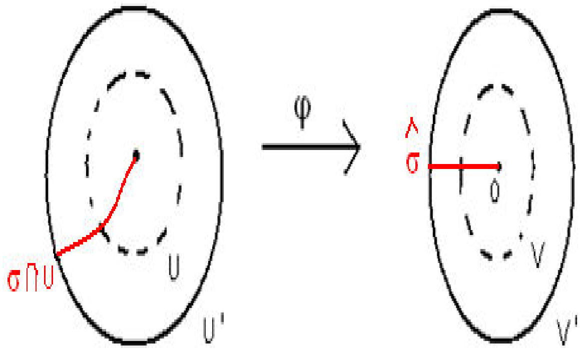

FIGURE 4.6 – Transformation locale par φ d'un voisinage du bord de σ.

$$\begin{cases} L\hat{u}_0 & = \hat{q}_0 \delta_{\hat{\sigma}} + \hat{f}_0(\hat{u}), \quad \text{dans} \quad V', \\ \hat{u}_0 & = 0, \qquad\qquad\quad \text{sur} \quad \partial V', \end{cases} \tag{4.55}$$

avec L, $\hat{f}_0$ et $\hat{q}_0$ définis par

$$L = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i^2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_j},$$

$$\hat{f}_0(\hat{u}) = (L\hat{\eta}_0)\hat{u} - 2\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{\eta}_0}{\partial \hat{x}_k}\right), \tag{4.56}$$

et

$$\hat{q}_0(0, 0, \hat{z}) = (\eta_0 q) \circ \varphi^{-1}(0, 0, \hat{z}).$$

Étape 3 : Résolution du problème localisé après transformation.
Observons que la solution $\hat{u}_0$ du problème (4.55), peut être considérée comme solution de

$$\begin{cases} L\hat{u}_0 & = \hat{f}_0(\hat{u}), \quad \text{dans} \quad V' \backslash \hat{\sigma}, \\ \hat{u}_0 & = 0, \qquad\quad \text{sur} \quad \partial V'. \end{cases} \tag{4.57}$$

On cherche à résoudre ce dernier (le problème (4.57)) localement, c-à-d. on recouvre $V' \backslash \hat{\sigma}$

avec Ω'_c et Ω'_{ce}, définis pour $\epsilon'' < \epsilon'$ par

$$\Omega'_c = \{x \in V' : r_0(x) < \epsilon' \text{ et } \rho_{ce}(x) > \frac{\epsilon''}{2}\}, \tag{4.58}$$

$$\Omega'_{ce} = \{x \in V' : r_0(x) < \epsilon' \text{ et } \rho_{ce}(x) < \epsilon'\}. \tag{4.59}$$

où $r_0(x) = dist(x, 0)$, $r_\sigma(x) = dist(x, \sigma)$ et $\rho_{ce}(x) = \frac{r_\sigma(x)}{r_0(x)}$ est la distance angulaire. Ainsi que pour un voisinage V de 0 qui est inclut dans V', on définit aussi des voisinages plus petits avec $\epsilon'' < \epsilon < \epsilon'$,

$$\Omega_c = \{x \in V : r_0(x) < \epsilon \text{ et } \rho_{ce}(x) > \frac{\epsilon}{2}\}, \tag{4.60}$$

et

$$\Omega_{ce} = \{x \in V : r_0(x) < \epsilon \text{ et } \rho_{ce}(x) < \epsilon\}, \tag{4.61}$$

Notons que $V'\backslash\hat{\sigma} = \Omega'_c \cup \Omega'_{ce}$ et $V\backslash\hat{\sigma} = \Omega_c \cup \Omega_{ce}$.

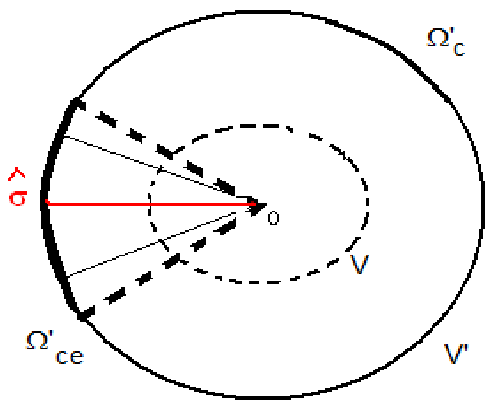

FIGURE 4.7 – Recouvrement de $V'\backslash\hat{\sigma}$.

On commence par donner quelques résultats qui seront utiles pour montrer le théorème principal de cette section. Le lemme suivant est l'équivalent du Lemme 4.1.3 mais dans les espaces de Sobolev avec poids.

Lemme 4.2.1. *Soient $m \geq 2$, ϵ et ϵ' des réels tels que $\epsilon < \epsilon'$. Soient*

$$\hat{\nu} = \{x \in V : \frac{\epsilon}{4} < r_0 < \epsilon \text{ et } \rho_{ce} < \epsilon\} \quad \text{et} \quad \hat{\nu}' := \{x \in V' \ : \ \frac{\epsilon^2}{4\epsilon'} < r_0 < \epsilon' \text{ et } \rho_{ce} < \epsilon'\}. \tag{4.62}$$

Soient β un nombre réel et L un opérateur elliptique à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^m$ défini sur $\hat{\nu}'$:

$$L = \sum_{|\mu| \leq 2} a_\mu(x)\partial^\mu.$$

Soit $u \in V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)$ *où* $\sigma := (\{0\} \times \mathbb{R}^+) \cap V'$ *(donné par (4.54)). Supposons de plus que* $Lu \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat\nu';\sigma)$. *Soit* $\eta \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^3)$ *telle que* $\eta = 1$ *sur* $\hat\nu$ *et supp*$(\eta) \subset \hat\nu'$. *On pose* $v = \eta u$, *et on suppose qu'il vérifie*

$$\|v\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat\nu';\sigma)} \lesssim \|Lv\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat\nu';\sigma)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}. \tag{4.63}$$

Alors, $u \in V^m_{\beta+m-1}(\hat\nu;\sigma)$ *et satisfait*

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat\nu;\sigma)} \lesssim \|Lu\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat\nu';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}.$$

Preuve : Ceci se fait par itération sur ℓ pour $2 \leq \ell \leq m$. Pour $\ell = 2$, par (4.63), on a

$$\|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat\nu';\sigma)} \lesssim \|Lv\|_{V^0_{\beta+1}(\hat\nu';\sigma)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, le fait que les coefficients de l'opérateur L sont continus sur $\hat\nu'$ qui est borné et que $u \in V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)$, en plus de $\eta = 1$ sur $\hat\nu$, on trouve

$$\|u\|_{V^2_{\beta+1}(\hat\nu;\sigma)} \lesssim \|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat\nu';\sigma)} \lesssim \|Lu\|_{V^0_{\beta+1}(\hat\nu';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}.$$

Supposons donc que pour $3 \leq \ell \leq m$, on a $u \in V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat\nu_1;\sigma)$ tel que $\hat\nu \subset \hat\nu_1 \subset \hat\nu'$, avec

$$\|u\|_{V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat\nu_1;\sigma)} \lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-3}_{\beta+\ell-2}(\hat\nu';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}. \tag{4.64}$$

Supposons aussi que pour $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\eta = 1$ sur $\hat\nu$ et *supp*$(\eta) \subset \hat\nu_1 \subset \hat\nu'$, on a $v = \eta u \in V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)$ et vérifie

$$\|v\|_{V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} \lesssim \|Lv\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}, \tag{4.65}$$

et montrons que $u \in V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu;\sigma)$ et satisfait

$$\|u\|_{V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu;\sigma)} \lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}.$$

Comme $\eta = 1$ sur $\hat\nu$, par (4.65), on obtient grâce au Lemme 1.1.3, que

$$\|u\|_{V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu;\sigma)} \lesssim \|v\|_{V^\ell_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} \lesssim \|Lv\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat\nu';\sigma)}. \tag{4.66}$$

Il nous reste donc à estimer $\|Lv\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)}$. Par définition, on a

$$\|Lv\|^2_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat\nu';\sigma)} = \sum_{|\gamma|\leq\ell-2} \|r^{\beta-1+2+|\gamma|}\partial^\gamma(Lv)\|^2_{0,\hat\nu'},$$

et si on utilise la formule de Leibniz, on obtient

$$Lv = (Lu)\eta + \sum_{|\mu|\leq 2} a_\mu(x) \sum_{\alpha<\mu} C_\mu^\alpha \partial^\alpha u \partial^{\mu-\alpha}\eta.$$

Donc toujours, grâce au Lemme 1.1.3, et comme η est de classe $\mathcal{C}^m$ ainsi que a_μ, en utilisant l'injection

$$V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}_1;\sigma) \hookrightarrow V^{\ell-1}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;\sigma),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \|Lv\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}';\sigma)} &\lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;\sigma)} + \|u\|_{V^{\ell-1}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;\sigma)} \\ &\lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;\sigma)} + \|u\|_{V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}_1;\sigma)}. \end{aligned}$$

Mais par (4.64), on conclut grâce au Lemme 1.1.2, que pour $3 \leq \ell \leq m$,

$$\begin{aligned} \|Lv\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}';\sigma)} &\lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;\sigma)} + \|Lu\|_{V^{\ell-3}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';\sigma)} \\ &\lesssim \|Lu\|_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}';\sigma)} + \|u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';\sigma)}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité avec (4.66) permettent de conclure. ∎

Afin de montrer la régularité locale de la solution de (4.1) au bord de la fracture, on a besoin d'un théorème de shift dans les espaces de Sobolev avec poids. La preuve de ce dernier est basée sur le recouvrement dyadique de notre domaine, et est inspirée de [14, Proposition 6.1] en plus de [11, Lemme 7.4.3], où les auteurs ont prouvé dans le premier, le résultat dans le cas des coefficients constants, et dans le deuxième, le résultat sur des cônes.

Proposition 4.2.2. *Soient $m \geq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ et L un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 sur Ω'_{ce} (défini par (4.59)) à coefficients variables de classe $\mathcal{C}^m$:*

$$L = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega'_{ce}}).$$

Soit $e := \hat{\sigma}$ défini dans (4.54) et soit $u \in H^2_{loc}\Big(\overline{\Omega'}_{ce}\backslash e\Big)$. On suppose de plus que $u \in V^1_\beta(\Omega'_{ce};e)$. Si $Lu \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};e)$, alors cette fonction u appartient à $V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};e)$ (avec Ω_{ce} défini par (4.61)) et satisfait

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};e)} \lesssim \|Lu\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};e)} + \|u\|_{V^1_\beta(\Omega'_{ce};e)}.$$

Preuve : Supposons que $u \in V^1_\beta(\Omega'_{ce};e)$ et $Lu \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};e)$, et montrons que $u \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};e)$ et satisfait l'estimation.
La preuve de cette estimée est basée sur un recouvrement dyadique local fini de Ω_{ce} et Ω'_{ce}. On introduit donc des domaines de référence $\hat{\nu}$ et $\hat{\nu'}$ définis dans (4.62).

Pour $j \in \mathbb{N}$, posons
$$\nu_j := 2^{-j}\hat{\nu} \quad \text{et} \quad \nu'_j := 2^{-j}\hat{\nu}',$$
et remarquons que
$$\Omega_{ce} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \nu_j \quad \text{et} \quad \Omega'_{ce} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \nu'_j.$$
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $h^j : \hat{x} \mapsto x = 2^{-j}\hat{x}$, qui transfert $\hat{\nu}$ en ν_j et $\hat{\nu}'$ en ν'_j.

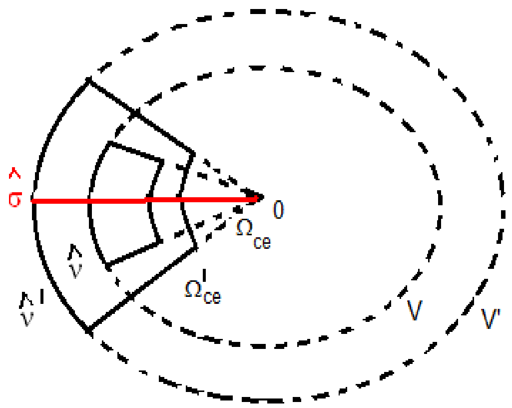

FIGURE 4.8 – Recouvrement dyadique de Ω_{ce} et Ω'_{ce}.

Notons par $h^j_* u$ la fonction $u \circ h^j$ et par $h^j_* f$ la fonction $f \circ h^j$. Alors $h^j_* u$ et $h^j_* f$ sont définis sur $\hat{\nu}'$ et
$$L\Big(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}}\Big)(h^j_* u) = h^j_* f \quad \text{dans } \hat{\nu}'. \tag{4.67}$$
Notons par $L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}})$ l'opérateur défini sur $\hat{\nu}'$ par
$$L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) := 2^{-2j} L\Big(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}}\Big).$$
Le problème (4.67) devient
$$L^j(h^j_* u) = 2^{-2j} h^j_* f \quad \text{dans } \hat{\nu}'. \tag{4.68}$$

Étape 1 : Estimation a priori entre $\hat{\nu}$ et $\hat{\nu}'$.
Montrons d'abord que la solution $h^j_* u$ de (4.68) est dans $V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu}; e)$ et satisfait
$$\|h^j_* u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu};e)} \lesssim \|L^j(h^j_* u)\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} + \|h^j_* u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}, \tag{4.69}$$
avec une constante positive qui ne dépend pas de j.
Soit $L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big)$ la partie principale de L^j, i.e.
$$L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) = 2^{-2j} L_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}}\Big) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(2^{-j}\hat{x})\partial^\alpha_{\hat{x}}. \tag{4.70}$$

La preuve de cette estimation peut être démontrée par récurrence sur ℓ avec $2 \leq \ell \leq m$. Vu la structure des domaines $\hat{\nu}$ et $\hat{\nu}'$, on peut les considérer comme des domaines avec arêtes et on cherche donc à vérifier les hypothèses du Théorème 4.1.4 pour qu'on puisse l'appliquer à l'opérateur L^j_{pp}. Une deuxième estimation du commutateur $L^j - L^j_{pp}$ permet de déduire le résultat.

Étape 1-1 : Montrons (4.69) **pour** $m = 2$**.** i.e. $h^j_* u \in V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}; e)$ et satisfait

$$\|h^j_* u\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu};e)} \lesssim \|L^j(h^j_* u)\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|h^j_* u\|_{V^1_{\beta}(\hat{\nu}';e)}.$$

Soit η une fonction de troncature telle que $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\eta = 1$ sur $\hat{\nu}$ et η est à support dans $\hat{\nu}_1$ avec $\hat{\nu} \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$. Posons $v := \eta(h^j_* u)$.
Le but alors est d'appliquer le Théorème 4.1.4 à l'opérateur $L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})$ entre $\hat{\nu}_1$ et $\hat{\nu}'$. La solution u est dans $V^1_\beta(\Omega'_{ce}; e)$, on obtient directement que $h^j_* u \in V^1_\beta(\hat{\nu}'; e)$ ou encore $v \in V^1_\beta(\hat{\nu}'; e)$.
De plus, par la formule de Leibniz, on a

$$Lv = \eta L(h^j_* u) + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(2^{-j}\hat{x}) 2^{j|\alpha|} \sum_{\gamma<\alpha} C^\gamma_\alpha \partial^\gamma_{\hat{x}}(h^j_* u)\partial^{\alpha-\gamma}_{\hat{x}}\eta. \tag{4.71}$$

On obtient donc que $L(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}})v \in V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}'; e)$ et alors comme $v \in V^1_\beta(\hat{\nu}'; e)$, on déduit que $L_{pp}(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}})v \in V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}'; e)$ ou encore $L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v \in V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}'; e)$ grâce à (4.70). En appliquant le Théorème 4.1.4 entre $\hat{\nu}_1$ et $\hat{\nu}'$, on obtient $v \in V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}_1; e)$ et satisfait

$$\|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}_1;e)} \lesssim \|L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\|L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} &\leq \|L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} \\ &\quad + \|(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}))v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)},\end{aligned}$$

et il suffit d'estimer $\|(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}))v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)}$. Par définition des opérateurs L^j et L^j_{pp}, on a

$$\Big(L^j\Big(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) - L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big)\Big)(v) = \sum_{|\gamma|\leq 1} 2^{j(|\gamma|-2)} a_\gamma(2^{-j}\hat{x}) \frac{\partial^\gamma v}{\partial \hat{x}^\gamma},$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(L^j\Big(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) - L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big)\Big)(v)\Big\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} &\leq c2^{-j}(\|v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|v\|_{V^1_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)}) \\ &\leq c2^{-j}\|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

On trouve alors que

$$(1-c2^{-j})\|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}_1;e)} \lesssim \|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Pour $j \geq j_1$ avec j_1 suffisamment grand tel que $c2^{-j} \leq \frac{1}{2}$, on obtient

$$\|v\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu}_1;e)} \lesssim \|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})v\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Rappelons que $v = h^j_* u$ sur $\hat{\nu}$ et $supp(\eta) \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$, on utilise le Lemme 4.2.1 et on conclut que

$$\|h^j_* u\|_{V^2_{\beta+1}(\hat{\nu};e)} \lesssim \|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(h^j_* u)\|_{V^0_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} + \|h^j_* u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Étape 1-2 : Supposons maintenant que pour $\hat{\nu} \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$ et pour $m \geq 3$, on a $h^j_* u \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{\nu}_1;e)$ et satisfait

$$\|h^j_* u\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{\nu}_1;e)} \lesssim \|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(h^j_* u)\|_{V^{m-3}_{\beta+m-2}(\hat{\nu}';e)} + \|h^j_* u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}, \tag{4.73}$$

et montrons que $h^j_* u \in V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu};e)$ et satisfait

$$\|h^j_* u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu};e)} \lesssim \|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(h^j_* u)\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} + \|h^j_* u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Pour cela, on définit une fonction de troncature $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\eta = 1$ sur $\hat{\nu}$ et $supp(\eta) \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$. Posons $v := \eta(h^j_* u)$.

Étape 1-2-1 : Montrons d'abord que $v \in V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu}_1;e)$ et satisfait

$$\|v\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu}_1;e)} \lesssim \|L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x},\partial_{\hat{x}})v\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} + \|v\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}, \tag{4.74}$$

avec une constante indépendante de j. Ceci se fait à l'aide du Théorème 4.1.4 appliqué à l'opérateur $L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x},\partial_{\hat{x}})$ entre $\hat{\nu}_1$ et $\hat{\nu}'$, et il suffit de vérifier donc que

$$L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x},\partial_{\hat{x}})(v) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e).$$

Par la formule de Leibniz, on a

$$Lv = \eta L(h^j_* u) + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(2^{-j}\hat{x})2^{j|\alpha|} \sum_{\gamma<\alpha} C^\gamma_\alpha \partial^\gamma_{\hat{x}}(h^j_* u)\partial^{\alpha-\gamma}_{\hat{x}}\eta,$$

et comme $f \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};e)$, on obtient que $L(h^j_* u) = h^j_* f \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)$.
De plus, par l'hypothèse (4.73) et comme $supp(\eta) \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$, en utilisant le Lemme 1.1.3, on obtient que $L(2^{-j}\hat{x}, 2^j\partial_{\hat{x}})v \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)$. Toujours grâce à l'hypothèse (4.73), comme $h^j_* u \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{\nu}_1;e)$ et $supp(\eta) \subset \hat{\nu}_1 \subset \hat{\nu}'$, par le Lemme 1.1.3 on a $v \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{\nu}';e)$ et

donc
$$L_{pp}(2^{-j}\hat{x}, 2^{j}\partial_{\hat{x}})(v) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}'; e),$$
ce qui n'est rien d'autre que $L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})(v) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}'; e)$ par (4.70). En appliquant le Théorème 4.1.4, on obtient $v \in V^{m}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}_1; e)$ et satisfait (4.74).

Étape 1-2-2 : Estimons le second membre de (4.74). On a

$$\begin{aligned}\|L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} \quad &\leq \quad \|L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}})v\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} \\ &\quad + \|(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}))v\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)},\end{aligned}$$

et il suffit de prouver donc que

$$\left\|\Big(L^j\Big(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) - L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big)\Big)(v)\right\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)} \leq \tilde{c}2^{-j}\|v\|_{V^{m}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}_1;e)}, \tag{4.75}$$

avec
$$L^j\Big(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) = \sum_{|\gamma|\leq 1} 2^{j(|\gamma|-2)} a_\gamma(2^{-j}\hat{x})\frac{\partial^\gamma}{\partial \hat{x}^\gamma}.$$

Ceci se fait par récurrence sur ℓ pour $2 \leq \ell \leq m$. Pour $\ell = 2$, par (4.72), on a déjà vérifié que

$$\left\|\Big(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})\Big)(v)\right\|_{V^{0}_{\beta+1}(\hat{\nu}';e)} \leq c2^{-j}\|v\|_{V^{2}_{\beta+1}(\hat{\nu}_1;e)}.$$

Supposons donc que pour $v \in V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}_1; e)$, (4.75) est vrai pour $\ell - 1$ avec $3 \leq \ell \leq m$, et montrons que cette inégalité reste vraie pour ℓ, pour tout $v \in V^{\ell}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1; e)$.
Par définition de la norme dans les espaces de Sobolev avec poids, on a

$$\begin{aligned}&\left\|\Big(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(\, 2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})\Big)(v)\right\|^2_{V^{\ell-2}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}';e)} \\ &\qquad = \left\|\Big(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big))(v)\right\|^2_{V^{\ell-3}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}';e)} \\ &\qquad + \sum_{|\gamma|=\ell-2}\left\|r_e^{\beta+\ell-1}\partial^\gamma\Big[\Big(L^j(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}) - L^j_{pp}(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}})\Big)(v)\Big]\right\|^2_{0,\hat{\nu}'}.\end{aligned}$$

D'une part, par l'hypothèse qu'on a mis, on trouve

$$\begin{aligned}\left\|\Big(L^j\Big(\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big) - L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x}, \partial_{\hat{x}}\Big)\Big)(v)\right\|_{V^{\ell-3}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}';e)} \quad &\leq \quad \tilde{c}_1 2^{-j}\|v\|_{V^{\ell-1}_{\beta+\ell-2}(\hat{\nu}_1;e)} \\ &\leq \quad \tilde{c}_2 2^{-j}\|v\|_{V^{\ell}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;e)}.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\gamma|=\ell-2}\Big\| r_e^{\beta+\ell-1}\partial^\gamma\Big(\Big(L^j\Big(\hat{x},\partial_{\hat{x}}\Big)-L^j_{pp}\Big(2^{-j}\hat{x},\partial_{\hat{x}}\Big)\Big)(v)\Big)\Big\|^2_{0,\hat{\nu}'}\\
&\quad\le \tilde{c}_3 2^{-2j}\Big[\sum_{|\alpha|\le 1}\sum_{|\gamma|=\ell-2}\Big\|r_e^{\beta+\ell-1}\frac{\partial^{\alpha+\gamma}v}{\partial\hat{x}^{\alpha+\gamma}}\Big\|^2_{0,\hat{\nu}'}+\sum_{|\gamma|=\ell-2}\sum_{|\mu|<|\gamma|}\sum_{|\alpha|\le 1}\Big\|r_e^{\beta+\ell-1}\frac{\partial^{\mu+\alpha}v}{\partial\hat{x}^{\mu+\alpha}}\Big\|^2_{0,\hat{\nu}'}\Big]\\
&\quad\le \tilde{c}_4 2^{-2j}\sum_{|\gamma+\alpha|\le\ell-1}\Big\|r_e^{\beta+\ell-1}\frac{\partial^{\alpha+\gamma}v}{\partial\hat{x}^{\alpha+\gamma}}\Big\|^2_{0,\hat{\nu}'}\\
&\quad= \tilde{c}_4 2^{-2j}\|v\|^2_{H^{\ell-1}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;e)}\\
&\quad\le \tilde{c}_5 2^{-2j}\|v\|^2_{V^{\ell}_{\beta+\ell-1}(\hat{\nu}_1;e)}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc (4.75).

Étape 1-2-3 : Comme conclusion des étapes 1.2.1 et 1.2.2, pour $j\ge j_2$ avec j_2 suffisamment grand tel que $\tilde{c}2^{-j_2}\le\frac{1}{2}$, on a

$$\|v\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu}_1;e)}\lesssim\|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})v\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)}+\|v\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Comme $v=h^j_*u$ sur $\hat{\nu}$ et $supp(\eta)\subset\hat{\nu}_1\subset\hat{\nu}'$, en appliquant le Lemme 4.2.1, on déduit directement que

$$\|h^j_*u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\hat{\nu};e)}\lesssim\|L^j(\hat{x},\partial_{\hat{x}})(h^j_*u)\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{\nu}';e)}+\|h^j_*u\|_{V^1_\beta(\hat{\nu}';e)}.$$

Étape 2 : Par le changement de variable $\hat{x}\to x=2^{-j}\hat{x}$ qui transfert $\hat{\nu}$ en $\hat{\nu}_j$ (resp. $\hat{\nu}'$ en $\hat{\nu}'_j$), on note que

$$r_e(\hat{x})=2^jr_e(x).$$

On obtient donc

$$2^{2(\beta-1)j}\sum_{|\gamma|\le m}\|r_e^{\beta-1+|\gamma|}\partial_x^\gamma u\|^2_{0,\nu_j}\lesssim 2^{2(\beta-1)j}\Big[\sum_{|\gamma|\le m-2}\|r_e^{\beta+1+|\gamma|}\partial_x^\gamma(Lu)\|^2_{0,\nu'_j}+\sum_{|\gamma|\le 1}\|r_e^{\beta-1+|\gamma|}\partial^\gamma u\|^2_{0,\nu'_j}\Big].$$

Multiplions par $2^{2(1-\beta)j}$ et sommons sur $j\in\mathbb{N}$, on obtient

$$\|u\|^2_{V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};e)}\lesssim\|Lu\|^2_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};e)}+\|u\|^2_{V^1_\beta(\Omega'_{ce};e)}.$$

■

Terminons cette section avec le résultat principal de cette dernière où on prouve la régularité locale du problème (4.1) proche de l'extrémité de σ (voir Figure 4.4).

Théorème 4.2.3. *Soit $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $0<\beta<1$ et soit $m\ge 1$. Soit $q\in L^2(\sigma)$ et soit $u\in\mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$ la solution de (4.1). Alors, si on note U un voisinage d'une extrémité c de*

σ, on a $u \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$ et satisfait

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Preuve : D'abord, on rappelle que la résolution du problème (4.1) revient à résoudre le problème (4.57) sur $V'\backslash\hat{\sigma}$, avec V' un voisinage de 0 obtenu par la transformation d'un voisinage U' d'une extrémité c de σ à l'aide du difféomorphisme φ, et $\hat{\sigma}$ donné par (4.54) (voir [9, Théorème 2.1.2, p. 56]).
Rappelons aussi que $V'\backslash\hat{\sigma} = \Omega'_c \cup \Omega'_{ce}$ avec Ω'_c et Ω'_{ce} donnés par (4.58) et (4.59).

D'abord, on vérifie que $\hat{u}_0$, solution de (4.57), est dans $V^1_\beta(V'\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$ en plus de $\hat{u}_0 \in H^2_{loc}(V'\backslash\hat{\sigma})$. En effet, comme précédemment, la solution u_0 du problème (4.50) est dans $H^1_\beta(U';\sigma)$, alors la solution $\hat{u}_0$ du problème (4.55) est dans $H^1_\beta(V';\hat{\sigma})$, ou encore $\hat{u}_0$ solution de (4.57) est dans $H^1_\beta(V'\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}) = V^1_\beta(V'\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^1_\beta(V'\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}. \tag{4.76}$$

De plus, $\hat{u}_0$ est aussi dans $H^2_{loc}(V'\backslash\hat{\sigma})$. En effet, comme dans la preuve du Théorème 4.1.7, pour une fonction de troncature η et un point $p \in V'\backslash O$ où O est un voisinage de $\hat{\sigma}$ et telle que $supp(\eta) \subset B_p(p, R_{B_p})$ avec R_{B_p} suffisamment petit de sorte que $R_{B_p} \leq \inf\limits_{y\in\partial B_p(p,R_{B_p})} d(y,\hat{\sigma})$, on obtient pour tout $x \in B_p(p, R_{B_p})$, que $d(x,\hat{\sigma}) \sim 1$.
En procédant de la même façon que dans la suite de la preuve du Théorème 4.1.7, on déduit que $\hat{u}_0 \in H^2_{loc}(V'\backslash\hat{\sigma})$.

En utilisant la récurrence, la Proposition 4.2.2 et le Lemme 7.4.3 de [11], on cherche donc à résoudre ces deux problèmes

$$\begin{cases} L\hat{u}_0 &= \hat{f}_0(\hat{u}), \qquad \text{dans} \quad \Omega'_{ce}, \\ \hat{u}_0 &= 0, \qquad \text{sur} \quad \partial V' \cap \Omega'_{ce}, \end{cases} \tag{4.77}$$

et

$$\begin{cases} L\hat{u}_0 &= \hat{f}_0(\hat{u}), \qquad \text{dans} \quad \Omega'_{c}, \\ \hat{u}_0 &= 0, \qquad \text{sur} \quad \partial V' \cap \Omega'_{c}, \end{cases} \tag{4.78}$$

et à montrer donc que

$$\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma}) \;\text{ et }\; \hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_c;\hat{\sigma}).$$

Ce qui donne directement, comme

$$V\backslash\hat{\sigma} = \Omega_c \cup \Omega_{ce},$$

avec Ω_c et Ω_{ce} définis respectivement par (4.60) et (4.61), que $\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(V;\hat{\sigma})$ ou encore $u_0 \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$, ce qui n'est rien d'autre que $u \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$.

Étape 1 : On a déjà vérifié que

$$\hat{u}_0 \in V^1_\beta(V'\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}) \text{ et } \hat{u}_0 \in H^2_{loc}(V'\backslash\hat{\sigma}),$$

donc pour $m = 2$, et pour pouvoir appliquer la Proposition 4.2.2 (resp. le Lemme 7.4.3 de [11]), il suffit de vérifier que $\hat{f}_0(\hat{u}) \in V^0_{\beta+1}(\Omega'_{ce};\hat{\sigma})$ (resp. $\hat{f}_0(\hat{u}) \in V^0_{\beta+1}(\Omega'_c;\hat{\sigma})$). Ceci est satisfait comme

$$\hat{u}_0 \in V^1_\beta(\Omega'_{ce};\hat{\sigma}) \text{ (resp. } \hat{u}_0 \in V^1_\beta(\Omega'_c;\hat{\sigma})),$$

et grâce à (4.76), on a

$$\|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{V^0_{\beta+1}(\Omega'_{ce};\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma} \quad \text{et} \quad \|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{V^0_{\beta+1}(\Omega'_c;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Par conséquent, par la Proposition 4.2.2, on obtient que la solution $\hat{u}_0$ du problème (4.77) est dans $V^2_{\beta+1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

De même, en appliquant le Lemme 7.4.3 de [11] au problème (4.78), on déduit que $\hat{u}_0 \in V^2_{\beta+1}(\Omega_c;\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(\Omega_c;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Comme conclusion, on obtient que $\hat{u}_0 \in V^2_{\beta+1}(V\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^2_{\beta+1}(V\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Comme $V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma}) = V^2_{\beta+1}(V\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$, on conclut que $\hat{u}_0 \in V^2_{\beta+1}(V;\hat{\sigma})$. Ainsi que $u_0 \in V^2_{\beta+1}(U;\sigma)$ grâce au difféomorphisme φ. Comme $u_0 = u$ sur U, on obtient finalement que $u \in V^2_{\beta+1}(U;\sigma)$ et satisfait

$$\|u\|_{V^2_{\beta+1}(U;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}.$$

Étape 2 : Supposons maintenant que $u \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{U};\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{U};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}, \tag{4.79}$$

et montrons que $u \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$, avec

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}, \tag{4.80}$$

et tel que $U \subset supp(\eta_0) = \hat{U} \subset U'$. Ce qui revient à montrer que

$$\hat{f}_0(\hat{u}) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_{ce};\hat{\sigma}) \text{ (resp. } V^{m-2}_{\beta+m-1}(\Omega'_c;\hat{\sigma})),$$

pour pouvoir appliquer la Proposition 4.2.2 (resp. le Lemme 7.4.3 de [11]), et trouver que

$$\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma}) \text{ (resp. } V^m_{\beta+m-1}(\Omega_c;\hat{\sigma})).$$

D'une part, par l'hypothèse (4.79), $u \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{U};\sigma)$, donc à l'aide du difféomorphisme φ, on trouve que

$$\hat{u} \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{V};\hat{\sigma}), \quad \text{avec } V \subset \hat{V} \subset V',$$

ou encore $\hat{u} \in V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$. Donc par les injections

$$V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}) \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-3}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}) \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}),$$

et comme $\nabla\hat{u} \in V^{m-2}_{\beta+m-2}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})^3 \hookrightarrow V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})^3$, on obtient par la définition de $\hat{f}_0(\hat{u})$ (voir (4.56)) et le Lemme 1.1.3 que

$$\hat{f}_0(\hat{u}) \in V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma}),$$

et satisfait par (4.79)

$$\|\hat{f}_0(\hat{u})\|_{V^{m-2}_{\beta+m-1}(\hat{V}\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})} \lesssim \|u\|_{V^{m-1}_{\beta+m-2}(\hat{U};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}. \tag{4.81}$$

On applique alors la Proposition 4.2.2 au problème (4.77), on obtient grâce à (4.76) et à (4.81) que $\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^m_{\beta+m-1}(\Omega_{ce};\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

On applique maintenant le Lemme 7.4.3 de [11] au problème (4.78), on a toujours grâce à (4.76) et à (4.81) que $\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(\Omega_c;\hat{\sigma})$ et satisfait

$$\|\hat{u}_0\|_{V^m_{\beta+m-1}(\Omega_c;\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Comme conclusion, on obtient $\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(V\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})$ avec

$$\|\hat{u}_0\|_{V^m_{\beta+m-1}(V\backslash\hat{\sigma};\hat{\sigma})} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Mais alors $\hat{u}_0 \in V^m_{\beta+m-1}(V;\hat{\sigma})$, ainsi, $u_0 \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$. Finalement comme $u_0 = u$ sur U, on conclut que $u \in V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

■

4.3 Régularité globale dans $\mathcal{O}$

Par les sections précédentes, on a montré la régularité de la solution du problème (4.1) dans un petit voisinage de σ. Il reste donc à prouver la régularité de cette solution loin de σ. Comme la norme dans les espaces de Sobolev avec poids sur cette partie est équivalente à la norme dans les espaces de Sobolev standard, on prouve donc que cette solution a la régularité H^m pour tout $m \geq 2$ loin de σ.

Lemme 4.3.1. *Soient $m \geq 2$ et $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^m$. Soit $x_0 \in \mathcal{O} \backslash O$ avec O un voisinage de σ, et soit $B(x_0, R)$ la boule centrée à ce point qui a une intersection vide avec σ. Alors la solution u du problème (4.1), qui est dans $\bigcap_{\beta>0} H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$, est dans $H^m(B(x_0,R))$ avec*

$$\|u\|_{m,B(x_0,R)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Preuve : On prouve le résultat par itération sur ℓ.

Étape 1 : Pour $\ell = 2$. Soit $\eta \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \eta = 1 & \text{sur } B(x_0,R), \\ \eta = 0 & \text{sur } \overline{\mathcal{O}} \backslash B(x_0,R'), \end{cases}$$

avec $R < R'$. Soit $w := \eta u$. Comme $u \in H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$, on vérifie facilement que $w \in \mathring{H}^1(B(x_0,R'))$ avec

$$\|w\|_{1,B(x_0,R')} \lesssim \|u\|_{H^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Pour tout $v \in \mathring{H}^1(B(x_0,R'))$, la formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,R')} \nabla w \cdot \nabla v &= \int_{B(x_0,R')} \eta \nabla u \cdot \nabla v + \int_{B(x_0,R')} u \nabla \eta \cdot \nabla v \\ &= \int_{B(x_0,R')} u \nabla \eta \cdot \nabla v + \int_{B(x_0,R')} \nabla u \cdot \nabla(\eta v) - \int_{B(x_0,R')} v \nabla \eta \cdot \nabla u. \end{aligned}$$

Comme $\eta v \in \mathring{H}^1_{-\beta}(\mathcal{O};\sigma)$, par (4.2), on a

$$\int_{B(x_0,R')} \nabla u \cdot \nabla(\eta v) = \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla(\eta v) = \int_\sigma q \eta v = 0,$$

ce qui permet de déduire que

$$\int_{B(x_0,R')} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{B(x_0,R')} u \nabla \eta \cdot \nabla v - \int_{B(x_0,R')} v \nabla \eta \cdot \nabla u.$$

Par application de Green, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,R')} \nabla w \cdot \nabla v &= -\int_{B(x_0,R')} \operatorname{div}(u\nabla\eta)v - \int_{B(x_0,R')} v\nabla\eta\cdot\nabla u \\ &= -\int_{B(x_0,R')} (u\Delta\eta + 2\nabla\eta\cdot\nabla u)v.\end{aligned}$$

Donc $w \in \mathring{H}^1(B(x_0,R'))$ est la solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w &= u\Delta\eta + 2\nabla\eta\cdot\nabla u =: h, \quad \text{dans} \quad B(x_0,R'), \\ \quad w &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sur} \quad \partial B(x_0,R'), \end{cases}$$

avec $h \in L^2(B(x_0,R'))$. Donc selon le Théorème 9.25 de [10], on obtient que $w \in H^2(B(x_0,R'))$ ou encore $u \in H^2(B(x_0,R))$ avec

$$\|u\|_{2,B(x_0,R)} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Étape 2 : Montrons que si l'estimée est vrai pour $\ell-1$ avec $3 \leq \ell \leq m$, alors elle est vrai pour ℓ. En effet, pour $\eta \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \eta = 1 \quad \text{sur } B(x_0,R), \\ \eta = 0 \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}}\backslash B(x_0,R'), \end{cases}$$

comme dans l'étape 1, $w := \eta u \in \mathring{H}^1(B(x_0,R'))$ est la solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w &= u\Delta\eta + 2\nabla\eta\cdot\nabla u =: h, \quad \text{dans} \quad B(x_0,R'), \\ \quad w &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sur} \quad \partial B(x_0,R'). \end{cases}$$

On utilise l'hypothèse $u \in H^{\ell-1}(B(x_0,R'))$, on obtient que $h \in H^{\ell-2}(B(x_0,R'))$ et donc par le Théorème 9.25 de [10], on conclut que $w \in H^{\ell}(B(x_0,R'))$ ou encore $u \in H^{\ell}(B(x_0,R))$ avec

$$\|u\|_{\ell,B(x_0,R)} \leq \|w\|_{\ell,B(x_0,R')} \lesssim \|h\|_{\ell-2,B(x_0,R')} \lesssim \|q\|_{0,\sigma}.$$

Terminons ce chapitre en résumant les résultats qu'on a montré dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.2. Régularité globale dans $\mathcal{O}$.
Soient $m \geq 2$ et $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^m$. Soit σ une fracture unidimensionnelle de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ strictement incluse dans $\mathcal{O}$ et soient $q \in L^2(\sigma)$ et $u \in \mathring{H}^1_\beta(\mathcal{O};\sigma)$

la solution de (4.1) *avec* $0 < \beta < 1$. *Alors* $u \in V^m_{\beta+m-1}(\mathcal{O};\sigma)$ *et satisfait l'estimation*

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(\mathcal{O};\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}.$$

Preuve : Pour $i \in I$ un ensemble fini, soit $x_i \in \sigma$ et soit $U^{(i)}_\sigma$ un voisinage de ce point qui ne contient pas les extrémités de σ. Posons $U_1 := \bigcup\limits_{i\in I} U^{(i)}_\sigma$, alors en appliquant le Théorème 4.1.7, on obtient $u \in V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U_1;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}.$$

Pour $j = 1, 2$, soit maintenant c_j les deux extrémités de σ et soit $U_2 := \bigcup\limits_{j=1}^{2} U^{(j)}_c$ avec $U^{(j)}_c$ un voisinage de c_j. Donc grâce au Théorème 4.2.3, $u \in V^m_{\beta+m-1}(U_2;\sigma)$ avec

$$\|u\|_{V^m_{\beta+m-1}(U_2;\sigma)} \lesssim \|q\|_{0;\sigma}.$$

Par conséquent, $u \in V^m_{\beta+m-1}(U_1 \cup U_2;\sigma)$ et la norme dans cet espace est toujours majorée par $\|q\|_{0,\sigma}$. Il reste alors à vérifier que u est régulière loin de σ, c-à-d. sur $U_0 := \mathcal{O}\backslash(U_1 \cup U_2)$.
On recouvre cette partie régulière avec un nombre fini de boules $B(x_0, R)$ telles que la fermeture de ces boules et σ sont disjointes, et on obtient par le Lemme 4.3.1 que $u \in H^m(U_0)$ avec

$$\|u\|_{m,U_0} \lesssim \|q\|_{0,\sigma},$$

ce qui achève la preuve. ∎

Bibliographie

[1] M. S. Agranovich and M. I. Vishik. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Math. Surveys*, 19 :53–157, 1964.

[2] F. Ali Mehmeti. *Transient tunnel effect and Sommerfeld problem. Wave in semi-infinite structures.* Mathematical Research, Vol. 91. Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[3] T. Apel, O. Benedix, D. Sirch, and B. Vexler. A priori mesh grading for an elliptic problem with Dirac right-hand side. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3) :992–1005, 2011.

[4] R. Araya, E. Behrens, and R. Rodríguez. A posteriori error estimates for elliptic problems with Dirac delta source terms. *Numer. Math.*, 105(2) :193–216, 2006.

[5] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Monographs in Mathematics, Vol. 96. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[6] S. Ariche, C. De Coster, and S. Nicaise. Regularity of solutions of elliptic or parabolic problems with dirac measures as data, soumis.

[7] I. Babuška and V. Nistor. Interior numerical approximation of boundary value problems with a distributional data. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 22(1) :79–113, 2006.

[8] I. Babuška and V. Nistor. Boundary value problems in spaces of distributions on smooth and polygonal domains. *J. Comput. Appl. Math.*, 218(1) :137–148, 2008.

[9] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, second edition, 1992.

[10] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[11] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. *Corner singularities and analytic regularity for Linear Elliptic Systems.* book in preparation.

[12] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 33 :627–649, 1999.

[13] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Mellin analysis of weighted Sobolev spaces with nonhomogeneous norms on cones. In *Around the research of Vladimir Maz'ya. I*, Int. Math. Ser. (N. Y.), Vol. 11., pages 105–136. Springer, New York, 2010.

[14] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Analytic regularity for linear elliptic systems in polygons and polyhedra. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22(8) :1250015, 63, 2012.

[15] C. D'Angelo. Finite element approximation of elliptic problems with Dirac measure terms in weighted spaces : applications to one- and three-dimensional coupled problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(1) :194–215, 2012.

[16] C. D'Angelo and A. Quarteroni. On the coupling of 1D and 3D diffusion-reaction equations. Application to tissue perfusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(8) :1481–1504, 2008.

[17] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains – smoothness and asymptotics of solutions.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer, Berlin, 1988.

[18] P. L. Duren. *Theory of H^p spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York, 1970.

[19] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[20] G. Eskin. *Lectures on linear partial differential equations.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 123. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[21] D. Euvrard. *Transformations de Fourier et Laplace.* Ecole Nationale Superiure de Techniques Avancées, 1978.

[22] W. Gong. Error estimates for finite element approximations of parabolic equations with measure data. *Math. Comp.*, 82(281) :69–98, 2013.

[23] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Monographs and Studies in Mathematics, Vol. 24. Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.

[24] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*, volume 22 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics].* Masson, Paris ; Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[25] http ://dlmf.nist.gov/. *Nist Digital Library of Mathematical Functions.*

[26] V. A. Kondrat′ev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 16 :209–292, 1967.

[27] V. A. Kozlov, V. G. Maz′ya, and J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 52. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[28] H. Le Dret. *Principe de maximum, Régularité élliptique et application.* UPMC, Paris. 2010.

[29] D. Leykekhman and B. Vexler. Optimal a priori error estimates of parabolic optimal control problems with pointwise control. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(5) :2797–2821, 2013.

[30] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.

[31] V. G. Maz'ya and J. Roßmann. On the Agmon-Miranda maximum principle for solutions of elliptic equations in polyhedral and polygonal domains. *Ann. Global Anal. Geom.*, 9 :253–303, 1991.

[32] V. G. Maz'ya and J. Roßmann. *Elliptic equations in polyhedral domains*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 162. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[33] S. A. Nazarov and B. A. Plamenevsky. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. de Gruyter Expositions in Mathematics, Vol. 13. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[34] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 16 :305–326, 1962.

[35] S. Nicaise. Le laplacien sur les réseaux deux-dimensionnels polygonaux topologiques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 67(2) :93–113, 1988.

[36] S. Nicaise. *Polygonal interface problems*. Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik [Methods and Procedures in Mathematical Physics], Vol. 39. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 1993.

[37] R. E. A. C. Paley and N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987. Reprint of the 1934 original.

[38] A. C. Ponce. Selected problems on elliptic equations involving measures. *Mémoire lauréat du concours annuel de 2012 de la classe des sciences de l'académie royale de Belgique*. http ://arxiv.org/abs/1204.0668v2.

[39] Y. Roitberg. *Boundary value problems in the spaces of distributions*, volume 498 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. Translated from the Russian manuscript by Inna Roitberg.

[40] M. Schechter. Negative norms and boundary problems. *Ann. of Math. (2)*, 72 :581–593, 1960.

[41] R. Scott. Finite element convergence for singular data. *Numer. Math.*, 21 :317–327, 1973/74.

[42] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 15(fasc. 1) :189–258, 1965.

[43] H. Tanabe. *Functional analytic methods for partial differential equations*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 204. Marcel Dekker Inc., New York, 1997.

[44] A. N. Tychonov and A. A. Samarski. *Partial differential equations of mathematical physics. Vol. I.* Translated by S. Radding. Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964.